

**ANALISIS DINAMIK MODEL EPIDEMI HIV/AIDS  
DENGAN DUA TAHAP LATEN DAN PENGOBATAN**

**SKRIPSI**

**oleh  
DORISMA SIALLAGAN  
135090401111029**



**JURUSAN MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS BRAWIJAYA  
MALANG  
2017**



# **ANALISIS DINAMIK MODEL EPIDEMI HIV/AIDS DENGAN DUA TAHAP LATEN DAN PENGOBATAN**

## **SKRIPSI**

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar  
Sarjana Sains dalam bidang Matematika

oleh :

**DORISMA SIALLAGAN**  
**135090401111029**



**JURUSAN MATEMATIKA**  
**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM**  
**UNIVERSITAS BRAWIJAYA**  
**MALANG**  
**2017**



**LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI**

**ANALISIS DINAMIK MODEL EPIDEMI HIV/AIDS  
DENGAN DUA TAHAP LATEN DAN PENGOBATAN**

Disusun Oleh:  
**DORISMA SIALLAGAN**  
**135090401111029**

**Setelah dipertahankan di depan Majelis Penguji  
dan dinyatakan memenuhi syarat untuk memperoleh gelar  
Sarjana Sains dalam bidang Matematika**

**Pembimbing**

**Nur Shofianah, S.Si., M.Si., Ph.D**  
**NIP. 198411242009122006**

**Mengetahui,**  
**Ketua Jurusan Matematika**  
**Fakultas MIPA Universitas Brawijaya**

**Ratno Bagus Edy Wibowo, S.Si., M.Si., Ph.D**  
**NIP. 197509082000031003**



## **LEMBAR PERNYATAAN**

**Saya yang bertanda tangan di bawah ini:**

**Nama : Dorisma Siallagan**

**NIM : 135090401111029**

**Jurusan : Matematika**

**Judul Skripsi : Analisis Dinamik Model Epidemi  
HIV/AIDS dengan Dua Tahap Laten  
dan Pengobatan**

**Dengan ini menyatakan bahwa:**

- 1. isi Skripsi yang saya buat adalah benar-benar karya sendiri dan tidak menjiplak karya orang lain, selain nama- nama yang termaktub di isi dan tertulis di Daftar Pustaka dalam Skripsi ini.**
- 2. Apabila di kemudian hari ternyata Skripsi yang saya tulis terbukti hasil jiplakan, maka saya bersedia menanggung segala risiko yang akan saya terima.**

**Demikian pernyataan ini dibuat dengan segala kesadaran.**

**Malang,  
Yang menyatakan,**

**Dorisma Siallagan  
NIM. 135090401111029**





# ANALISIS DINAMIK MODEL EPIDEMI HIV/AIDS DENGAN DUA TAHAP LATEN DAN PENGOBATAN

## ABSTRAK

Pada skripsi ini dibahas model epidemi HIV/AIDS dengan dua tahap laten dan pengobatan. Berdasarkan fakta bahwa sistem kekebalan tubuh setiap individu berbeda-beda maka laju perkembangan virus HIV/AIDS pada setiap individu juga berbeda, sehingga tahap laten terbagi menjadi tahap *slow* laten dan *fast* laten. Analisis yang dilakukan pada model meliputi penentuan titik kesetimbangan dan analisis kestabilan global. Berdasarkan hasil analisis diketahui bahwa model mempunyai dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemi. Eksistensi titik kesetimbangan endemi dan kestabilan global kedua titik kesetimbangan tersebut bergantung pada angka reproduksi dasar yang dinotasikan dengan  $R_0$ . Jika  $R_0 \leq 1$ , maka hanya terdapat satu titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit. Jika  $R_0 > 1$ , maka terdapat dua titik kesetimbangan, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemi. Analisis kestabilan menunjukkan bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotik global jika  $R_0 < 1$ , sedangkan jika  $R_0 > 1$  titik kesetimbangan endemi stabil asimtotik global.

**Kata kunci:** HIV/AIDS, dua tahap laten, pengobatan, angka reproduksi dasar, stabil asimtotik global.



# **DYNAMIC ANALYSIS OF HIV / AIDS EPIDEMIC MODEL WITH TWO LATENT STAGES AND TREATMENT**

## ***ABSTRACT***

An epidemic model with two latent stages and treatment is discussed in this project. Based on the fact that the immune system of each individual varies, then the growth rate of HIV / AIDS virus is different in each individual. Hence, the latent stage is divided into slow and fast latent stage. The analysis of the model includes the determination of equilibrium point and global stability analysis. The result of analysis shows that the model has two equilibrium points, namely the disease free equilibrium point and the endemic equilibrium point. The existence of endemic equilibrium point and global stability of the two equilibrium points depend on the basic reproduction number which are denoted by  $R_0$ . If  $R_0 \leq 1$ , there is only one equilibrium point, namely the disease-free equilibrium point. If  $R_0 > 1$ , there are two equilibrium points, which are the disease-free equilibrium point and the endemic equilibrium point. Stability analysis shows that the disease free equilibrium point is global asymptotically stable if  $R_0 < 1$ , while if  $R_0 > 1$  the endemic equilibrium point will be asymptotically stable globally .

**Kata kunci:** HIV/AIDS, two latent stages, treatment, basic reproduction number, global stability.



## KATA PENGANTAR

Puji syukur kepada Tuhan Yang Maha Esa atas limpahan kasih dan karuniaNya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul **“ANALISIS DINAMIK MODEL EPIDEMI HIV/AIDS DENGAN DUA TAHAP LATEN DAN PENGOBATAN”** tepat pada waktunya. Penulisan skripsi ini dilakukan dalam rangka memenuhi salah satu syarat untuk memperoleh gelar Sarjana pada program studi Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Brawijaya.

Penulisan Skripsi ini tidak lepas dari bantuan, bimbingan, dan dukungan dari banyak pihak. Oleh karena itu, penulis menyampaikan terima kasih kepada:

1. Nur Shofianah, S.Si.,M.Si.,Ph.D selaku Dosen Pembimbing Skripsi atas bimbingan, arahan, saran dan kesabaran yang telah diberikan selama penyusunan skripsi ini.
2. Dr.Dra. Wuryansari Muharini Kusumawinahyu, M.Si dan Prof.Dr. Agus Widodo, M.Kes selaku Dosen Penguji, atas segala kritik dan saran yang telah diberikan untuk perbaikan Skripsi ini.
3. Dr. Isnani Darti, S.Si., M.Si selaku Dosen Penasehat Akademik yang selalu memberikan motivasi dan nasihat selama penulis menjadi mahasiswa di Universitas Brawijaya.
4. Ratno Bagus Edy Wibowo S.Si., M.Si., Ph.D. selaku Ketua Jurusan Matematika dan Dr. Isnani Darti, S.Si., M.Si. selaku Ketua Program Studi Matematika atas segala bantuan yang diberikan.
5. Seluruh dosen Matematika FMIPA Universitas Brawijaya yang telah memberikan bekal dan ilmu pengetahuan serta staff administrasi dan karyawan Jurusan Matematika atas segala bantuannya.
6. Bapak, Mama, kakak, dan adik yang selalu memberikan cinta kasih, motivasi, semangat, dukungan serta doa kepada penulis.
7. Teman-teman Matematika 2013 yang sangat luar biasa selama bersama-sama menempuh program studi Matematika Universitas Brawijaya dan yang juga memberikan dukungan, motivasi, dan semangat selama penulisan skripsi ini.
8. Keluarga besar PMK Philadelphia yang selalu memberikan kekuatan, kasih, semangat, dukungan dan doa.
9. Semua pihak yang telah membantu selama proses perkuliahan

program studi Matematika FMIPA Universitas Brawijaya yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu.

Penulis menyadari bahwa dalam penulisan skripsi ini masih terdapat kekurangan, untuk itu penulis mengharapkan kritik dan saran dari semua pihak. Kritik dan saran dapat dikirim melalui email penulis [dorismasiallagan@gmail.com](mailto:dorismasiallagan@gmail.com). Semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi pembaca khususnya mahasiswa Matematika Universitas Brawijaya.

Malang,

Penulis

## DAFTAR ISI

	Halaman
<b>HALAMAN JUDUL.....</b>	<b>i</b>
<b>LEMBAR PENGESAHAN SKRIPSI.....</b>	<b>iii</b>
<b>LEMBAR PERNYATAAN.....</b>	<b>v</b>
<b>ABSTRAK.....</b>	<b>vii</b>
<b>ABSTRACT.....</b>	<b>ix</b>
<b>KATA PENGANTAR .....</b>	<b>xi</b>
<b>DAFTAR ISI.....</b>	<b>xiii</b>
<b>DAFTAR GAMBAR .....</b>	<b>xv</b>
<b>DAFTAR LAMPIRAN .....</b>	<b>xvii</b>
<b>DAFTAR TABEL.....</b>	<b>xix</b>
<b>BAB I PENDAHULUAN</b>	
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	3
1.3 Tujuan.....	3
1.4 Batasan Masalah.....	3
<b>BAB II DASAR TEORI</b>	
2.1 Persamaan Diferensial .....	5
2.2 Sistem Dinamik .....	6
2.2.1 Sistem otonomus .....	6
2.2.2 Sistem otonomus linear .....	8
2.2.3 Sistem otonomus nonlinear .....	9
2.3 Kriteria Routh-Hurwitz .....	12
2.4 Angka Reproduksi Dasar.....	13
2.5 Matriks Generasi Selanjutnya .....	13
2.6 Analisis Kestabilan Global .....	15
2.7 Pertaksamaan Rata-rata Aritmatika dan Geometri .....	15
2.8 Model Epidemik HIV/AIDS dengan Dua Tahap Laten dan Pengobatan.....	16
2.8.1 Laju perubahan subpopulasi rentan.....	18
2.8.2 Laju perubahan subpopulasi <i>slow</i> laten.....	19
2.8.3 Laju perubahan subpopulasi <i>fast</i> laten .....	20
2.8.4 Laju perubahan subpopulasi simtomatik.....	21
2.8.5 Laju perubahan subpopulasi berpenyakit AIDS...22	
<b>BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN</b>	
3.1 Titik Keseimbangan .....	25
3.2 Angka Reproduksi Dasar.....	25

3.3	Syarat Eksistensi Titik Keseimbangan Endemi.....	28
3.4	Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan Bebas Penyakit $E^0$ .....	29
3.4.1	Analisis kestabilan lokal $E^0$ .....	29
3.4.2	Analisis kestabilan global $E^0$ .....	33
3.5	Analisis Kestabilan Global Titik Keseimbangan Endemi $E^*$ .....	35
3.6	Simulasi Numerik.....	44
3.6.1	Kestabilan titik keseimbangan untuk $R_0 < 1$ .....	44
3.6.2	Kestabilan titik keseimbangan untuk $R_0 = 1$ .....	46
3.6.3	Kestabilan titik keseimbangan untuk $R_0 > 1$ .....	48
<b>BAB IV PENUTUP</b>		
4.1	Kesimpulan .....	53
4.2	Saran .....	53
<b>DAFTAR PUSTAKA .....</b>		<b>55</b>



## DAFTAR GAMBAR

Gambar 2.1 Diagram kompartemen model epidemi HIV/AIDS dengan dua tahap laten dan pengobatan .....	17
Gambar 3.1 Kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit ( $E_0$ ) ketika $R_0 = 0,1427$ .....	45
Gambar 3.2 Potret fase titik kesetimbangan bebas penyakit ( $E_0$ ) ketika $R_0 = 0,1427$ .....	46
Gambar 3.3 Kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit ( $E_0$ ) ketika $R_0 = 1$ .....	47
Gambar 3.4 Potret fase titik kesetimbangan bebas penyakit ( $E_0$ ) ketika $R_0 = 1$ .....	48
Gambar 3.5 Kestabilan titik kesetimbangan endemi ( $E^*$ ) ketika $R_0 = 1,0438$ untuk $p = q$ .....	49
Gambar 3.6 Potret fase titik kesetimbangan endemi ( $E^*$ ) ketika $R_0 = 1,0438$ untuk $p = q$ .....	50
Gambar 3.7 Kestabilan titik kesetimbangan endemi ( $E^*$ ) ketika $R_0 = 1,3680$ untuk $p \neq q$ .....	51
Gambar 3.8 Potret fase titik kesetimbangan endemi ( $E^*$ ) ketika $R_0 = 1,3680$ untuk $p \neq q$ .....	52



## DAFTAR LAMPIRAN

Lampiran 1 Penentuan titik kesetimbangan.....	57
Lampiran 2 Penentuan nilai eigen dari matriks $FV^{-1}$ .....	65
Lampiran 3 Hubungan titik kesetimbangan endemi $E^*$ dengan $R_0$ .....	71
Lampiran 4 Perhitungan koefisien persamaan 3.7.....	75
Lampiran 5 Pembuktian $a_1a_2 - a_0a_3 > 0$ .....	79



## DAFTAR TABEL

Tabel 3.1 Nilai parameter simulasi I .....	44
--------------------------------------------	----



# **BAB I**

## **PENDAHULUAN**

### **1.1 Latar Belakang**

AIDS (*Acquired Immune Deficiency Syndrome*) merupakan suatu penyakit yang timbul karena rusaknya sistem kekebalan tubuh manusia akibat infeksi virus HIV (*Human Immunodeficiency Virus*). AIDS telah berkembang menjadi pandemi global sejak pertama kali diakui oleh pusat pengendalian dan pencegahan penyakit Amerika Serikat. Penularan virus HIV biasanya terjadi melalui beberapa cara, yaitu transfusi darah dari orang yang terinfeksi, memakai jarum suntik dan perlengkapan menyuntik yang sudah terkontaminasi, melalui seks oral, pemakaian alat bantu seks secara bersama-sama atau bergantian dan penularan dari ibu kepada bayi pada masa kehamilan, melahirkan, dan menyusui. Virus HIV mempunyai masa inkubasi yang panjang. Tanpa terapi antiretroviral, rata-rata waktu perkembangan dari infeksi HIV menjadi AIDS adalah 9-10 tahun, dan waktu bertahan rata-rata setelah mengalami AIDS hanya sekitar 9 bulan (Huo dan Feng, 2013).

Laju perkembangan virus HIV berbeda pada setiap individu. Salah satu faktor yang mempengaruhi laju perkembangan virus HIV adalah sistem kekebalan tubuh. Sistem kekebalan tubuh adalah sebuah pertahanan yang dikembangkan oleh tubuh untuk melawan infeksi. Tubuh dengan sistem kekebalan yang rendah akan lebih rentan terhadap berbagai serangan virus dan bakteri, sehingga mudah terkena penyakit. Kekebalan tubuh yang rendah disebabkan oleh turunan dari orangtua, pernah mengidap penyakit yang mengakibatkan kekebalan tubuh rendah, kekurangan asupan nutrisi, dan umur. Virus HIV berkembang lebih cepat pada individu yang memiliki sistem kekebalan tubuh yang rendah. Virus HIV mempunyai dua tahapan infeksi yaitu tahap asimtomatik dan tahap simptomatik. Tahap asimtomatik yang biasa dikenal juga sebagai tahap laten adalah tahap ketika individu terinfeksi tidak menyadari gejala apapun. Tahap simptomatik adalah tahap infeksi virus dengan gejala yang sudah terlihat.

Model matematika telah digunakan secara luas untuk mempelajari epidemiologi HIV/AIDS. Model penyebaran penyakit HIV/AIDS merupakan salah satu contoh bentuk dasar model

kompartemen epidemi dengan periode laten, yaitu selang waktu antara pertama kali individu menerima infeksi sampai waktu ketika individu dikatakan terinfeksi. Pada periode ini, virus HIV mengalami masa inkubasi atau perkembangan.

Model awal mengenai HIV/AIDS diperkenalkan oleh May dan Anderson yang membahas dinamika penularan HIV (1987). Pada tahun 2001, Blower mengembangkan model HIV/AIDS dengan menunjukkan bahwa tingkat penyebaran HIV akan berkurang karena individu yang positif HIV mendapatkan pengobatan, dengan asumsi bahwa orang yang diobati akan mengubah perilaku mereka. Pada tahun 2009, Cai dkk. mengembangkan sebuah model epidemi HIV/AIDS dengan pengobatan dan tahap infeksi yang dibagi menjadi dua yaitu tahap laten dan tahap simptomatik. Pada tahun 2011, Nyabadza dan Mukandavire membuat sebuah model HIV / AIDS dengan pengawasan dan pengobatan.

Skripsi ini mengkaji ulang penelitian Huo dan Feng (2013) yang menganalisis model epidemi HIV/AIDS dengan pengobatan pada tahap simptomatik dan tahap laten yang terbagi menjadi dua tahap yaitu tahap *fast* laten dan tahap *slow* laten. Tahap laten yang terbagi menjadi dua karena mempertimbangkan sistem kekebalan tubuh yang berbeda pada setiap individu. Tahap *fast* laten adalah tahap infeksi dengan perkembangan virus HIV lebih cepat di dalam tubuh karena sistem kekebalan tubuh yang rendah. Tahap *slow* laten adalah tahap infeksi dengan perkembangan virus HIV lebih lambat di dalam tubuh karena sistem kekebalan tubuh yang baik. Dengan pengobatan, individu pada tahap simptomatik dapat berubah menjadi individu laten. Analisis dinamik yang dilakukan pada model meliputi penentuan titik kesetimbangan, penentuan angka reproduksi dasar, analisis kestabilan dan simulasi numerik untuk mendukung hasil analisis yang diperoleh.



## **1.2 Rumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka masalah yang dibahas dalam skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Bagaimana titik kesetimbangan dan syarat eksistensi titik kesetimbangan model epidemi HIV/AIDS dengan dua tahap laten dan pengobatan?
2. Bagaimana kestabilan global titik kesetimbangan model epidemi HIV/AIDS dengan dua tahap laten dan pengobatan?
3. Bagaimana hasil simulasi numerik model epidemi HIV/AIDS dengan dua tahap laten dan pengobatan?

## **1.3 Tujuan**

Berdasarkan rumusan masalah yang telah diuraikan, tujuan penulisan skripsi ini adalah sebagai berikut.

1. Menentukan titik kesetimbangan dan syarat eksistensi titik kesetimbangan model epidemi HIV/AIDS dengan dua tahap laten dan pengobatan.
2. Menentukan kestabilan global titik kesetimbangan model.
3. Menginterpretasikan hasil simulasi numerik.

## **1.4 Batasan Masalah**

Pembahasan pada skripsi ini dibatasi oleh beberapa hal sebagai berikut.

1. Subpopulasi bersifat tertutup sehingga tidak ada migrasi.
2. Penyebaran virus terjadi karena adanya interaksi antara individu rentan dengan individu yang berada pada subpopulasi *fast* laten dan subpopulasi simtomatik.
3. Beberapa individu rentan sudah memiliki penyakit kronis lain yang mampu mengurangi kapasitas kekebalan tubuh, seperti TBC dan diabetes.
4. Pengobatan hanya diberikan pada subpopulasi simtomatik.



## BAB II DASAR TEORI

Pada bab ini diberikan beberapa definisi dan teorema mengenai teori-teori yang digunakan sebagai acuan pada bab selanjutnya.

### 2.1 Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial biasa adalah suatu persamaan diferensial yang memuat turunan terhadap satu variabel bebas. Persamaan diferensial biasa orde  $n$  secara umum dapat ditulis sebagai berikut

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

dengan  $y, y', \dots, y^{(n)}$  adalah fungsi dari  $x$ .

Persamaan diferensial biasa diklasifikasikan menjadi dua, yaitu persamaan diferensial biasa linear dan persamaan diferensial biasa nonlinear. Persamaan diferensial biasa berorde  $n$  dengan variabel bebas  $x$  dan variabel tak bebas  $y$  disebut linear, jika persamaan tersebut tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x),$$

dengan  $a_n(x) \neq 0$ . Ketika  $f(x) = 0$  maka persamaan tersebut merupakan persamaan diferensial biasa linear yang homogen. Persamaan diferensial biasa disebut nonlinear apabila variabel tak bebas atau turunannya berderajat lebih dari satu atau memuat perkalian antara variabel tak bebas dan turunannya.

Himpunan dari  $n$  persamaan differensial biasa disebut sistem persamaan differensial biasa berdimensi  $n$ , dengan  $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ . Bentuk umum sistem persamaan diferensial biasa linear orde satu berdimensi  $n$  dengan koefisien konstan adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + f_1(t), \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + f_2(t), \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + f_n(t). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Sistem (2.1) dapat ditulis sebagai

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t) x_j + f_i(t) \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

atau dalam bentuk matriks

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = P\vec{x} + \vec{f}(t),$$

dengan  $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ ,  $P = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ , dan  $\vec{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$

(Finizio dan Ladas, 1982).

## 2.2 Sistem Dinamik

Sistem dinamik merupakan sistem yang selalu berubah dan dapat diketahui kondisinya di masa yang akan datang jika diketahui kondisinya saat ini atau di masa lalu. Sistem dinamik dibagi menjadi dua, yaitu sistem dinamik diskret dengan bentuk umum

$$\vec{x}_{t+1} = f(\vec{x}_t), t \in \mathbb{Z} \text{ atau } \mathbb{N}, \vec{x} \in \mathbb{R}^n,$$

dan sistem dinamik kontinu dengan bentuk umum

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x}, t) \text{ dengan } \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

(Alligood, dkk. 2000).

### 2.2.1 Sistem otonomus

Sistem otonomus merupakan sistem persamaan diferensial yang berbentuk

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned} \tag{2.2}$$

dengan fungsi  $f_i$  adalah fungsi kontinu dan tidak bergantung secara eksplisit terhadap variabel bebas  $t$  untuk  $i = 1, 2, \dots, n$

(Finizio dan Ladas, 1982).

### Definisi 2.2.1 (Titik Keseimbangan)

Perhatikan sistem otonomus (2.2). Titik  $\vec{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$  yang memenuhi  $f_1(\vec{x}^*) = f_2(\vec{x}^*) = \dots = f_n(\vec{x}^*) = 0$  disebut titik kritis sistem otonomus (2.2). Titik kritis  $\vec{x}^*$  merupakan solusi sistem (2.2) yang bernilai konstan, sebab nilai  $\frac{dx_1}{dt} = \dots = \frac{dx_n}{dt} = 0$ . Keadaan yang menyebabkan  $\frac{dx_1}{dt} = \dots = \frac{dx_n}{dt} = 0$  disebut keadaan setimbang, sehingga titik kritis disebut juga titik keseimbangan

(Finizio dan Ladas, 1982).

### Definisi 2.2.2 (Kestabilan Titik Keseimbangan)

Titik keseimbangan  $\vec{x}^*$  sistem (2.2) dikatakan

1. stabil, jika  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$  sedemikian sehingga untuk setiap solusi  $\vec{x} = \vec{x}(t)$  yang memenuhi

$$\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta$$

maka berlaku

$$\|\vec{x}(t) - \vec{x}^*\| < \varepsilon, \forall t > 0,$$

2. stabil asimtotik, jika stabil dan  $\exists \delta_0 > 0, 0 < \delta_0 < \delta$  sedemikian sehingga sebuah solusi  $\vec{x} = \vec{x}(t)$  yang memenuhi

$$\|\vec{x}(t) - \vec{x}^*\| < \delta_0$$

maka

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{x}(t) = \vec{x}^*,$$

3. tak stabil, jika titik tersebut tidak memenuhi kriteria (1).

Kestabilan asimtotik berarti titik keseimbangan stabil dan trayektori solusi-solusi lain di sekitarnya akan konvergen menuju titik keseimbangan untuk  $t \rightarrow \infty$

(Boyce dan DiPrima, 2009).

### 2.2.2 Sistem otonomus linear

Perhatikan sistem otonomus linear

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n,\end{aligned}\tag{2.3}$$

yang dapat dinyatakan sebagai  $\frac{d\vec{x}}{dt} = Z\vec{x}$ , dengan

$$Z = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ dan } \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Penentuan tipe kestabilan titik kesetimbangan sistem (2.3) bergantung pada nilai eigen matriks  $Z$ .

#### **Teorema 2.1**

Misalkan  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  adalah nilai eigen matriks koefisien  $Z$  sistem otonomus linear (2.3) dengan  $|Z| \neq 0$ . Titik kesetimbangan  $\vec{x}^* = \vec{0}$  bersifat

1. stabil asimtotik jika bagian riil  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  negatif,
2. stabil tetapi bukan asimtotik jika semua nilai eigen memiliki bagian riil tak positif,
3. tidak stabil jika sedikitnya satu nilai eigen memiliki bagian riil yang positif

(Finizio dan Ladas, 1982).

### 2.2.3 Sistem otonomus nonlinear

Perhatikan sistem otonomus nonlinear berikut

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(\vec{x}), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(\vec{x}), \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(\vec{x}),\end{aligned}\tag{2.4}$$

dengan  $f_1, f_2, \dots, f_n$  adalah fungsi nonlinear yang mempunyai turunan parsial yang kontinu di titik kesetimbangan  $\vec{x}^*$ . Deret Taylor fungsi  $f_1, f_2, \dots, f_n$  di sekitar  $\vec{x}^*$  adalah

$$\begin{aligned}f_i(\vec{x}) &= f_i(\vec{x}^*) + \frac{\partial f_i(\vec{x}^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial f_i(\vec{x}^*)}{\partial x_2}(x_2 - x_2^*) + \dots \\ &\quad + \frac{\partial f_i(\vec{x}^*)}{\partial x_n}(x_n - x_n^*) + \omega_i(\vec{x}), \quad i = 1, 2, \dots, n\end{aligned}$$

dengan  $\omega_1(\vec{x}), \omega_2(\vec{x}), \dots, \omega_n(\vec{x})$  adalah suku sisa. Untuk hampiran orde satu terhadap  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , suku sisa memenuhi sifat

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}^*} \frac{\omega_i(\vec{x})}{\|\vec{w}\|} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{2.5}$$

dengan  $\vec{w} = (x_1 - x_1^*, x_2 - x_2^*, \dots, x_n - x_n^*)^T$ .

Dengan memanfaatkan deret Taylor fungsi  $f_1, f_2, \dots, f_n$  di sekitar  $\vec{x}^*$  serta mengingat

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{d(x_1 - x_1^*)}{dt}, \frac{dx_2}{dt} = \frac{d(x_2 - x_2^*)}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt} = \frac{d(x_n - x_n^*)}{dt},$$

persamaan (2.4) dapat ditulis dalam bentuk matriks

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 - x_1^* \\ x_2 - x_2^* \\ \vdots \\ x_n - x_n^* \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} f_1(\vec{x}^*) \\ f_2(\vec{x}^*) \\ \vdots \\ f_n(\vec{x}^*) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_1^* \\ x_2 - x_2^* \\ \vdots \\ x_n - x_n^* \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} \omega_1(\vec{x}) \\ \omega_2(\vec{x}) \\ \vdots \\ \omega_n(\vec{x}) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Matriks

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

disebut matriks Jacobi atau matriks turunan parsial dan dinotasikan sebagai  $J$ .

Jika  $u_1 = (x_1 - x_1^*), u_2 = (x_2 - x_2^*), \dots, u_n = (x_n - x_n^*)$ , sehingga  $\vec{w} = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$  dan dengan mengingat bahwa  $f_1(\vec{x}^*) = f_2(\vec{x}^*) = \dots = f_n(\vec{x}^*) = 0$ , maka persamaan (2.6) dapat ditulis sebagai



$$\begin{bmatrix} \frac{du_1}{dt} \\ \frac{du_2}{dt} \\ \vdots \\ \frac{du_n}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\vec{x}^*)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1(\vec{x}) \\ \omega_2(\vec{x}) \\ \vdots \\ \omega_n(\vec{x}) \end{bmatrix},$$

atau

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J\vec{w} + \vec{\omega}.$$

Berdasarkan persamaan (2.5) bila  $\vec{w} \rightarrow 0$  maka  $\vec{\omega} \rightarrow 0$ , sehingga  $\vec{\omega}$  dapat diabaikan dan di sekitar  $\vec{x}^*$  sistem nonlinear (2.4) dapat dihamperi oleh sistem linear

$$\frac{d\vec{w}}{dt} = J\vec{w}. \quad (2.7)$$

Jika  $x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^*, \dots, x_n = x_n^*$  maka  $\vec{u} = \vec{0}$ , sehingga sistem linear (2.7) memiliki titik kesetimbangan  $\vec{w}^* = \vec{0}$ .

(Boyce dan DiPrima, 2009).

### **Teorema 2.2 (Kestabilan Sistem Otonomus Nonlinear)**

1. Titik kesetimbangan sistem otonomus nonlinear bersifat stabil asimtotik jika titik kesetimbangan sistem hasil linearisasi stabil asimtotik.
2. Titik kesetimbangan sistem otonomus nonlinear bersifat tak stabil jika titik kesetimbangan sistem hasil linearisasi tak stabil

(Finizio dan Ladas, 1982).

### 2.3 Kriteria Routh-Hurwitz

Sistem otonomus dengan sebuah matriks Jacobi yang berbentuk

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

mempunyai nilai eigen yang dapat diperoleh dengan menyelesaikan  $\det(J - \lambda I) = 0$ , sehingga diperoleh persamaan karakteristik dalam bentuk

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (2.9)$$

Titik kesetimbangan sistem otonomus dengan matriks Jacobi (2.8) akan stabil jika semua akar persamaan (2.9) bernilai negatif, atau dengan kata lain  $\lambda_i < 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Persamaan (2.9) umumnya sulit untuk diselesaikan, sehingga sulit pula untuk menentukan tanda nilai eigennya. Oleh karena itu digunakan kriteria Routh-Hurwitz untuk menentukan tanda nilai eigen matriks (2.8) dengan menggunakan koefisien-koefisien persamaan (2.9), seperti dinyatakan dalam teorema berikut.

#### **Teorema 2.3**

Akar-akar persamaan (2.9) memiliki bagian riil negatif jika dan hanya jika

$$\begin{aligned} D_1 &= a_k > 0, \\ D_2 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \\ D_3 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \\ &\vdots \\ D_k &= \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_k \end{vmatrix} > 0, \end{aligned}$$

dengan  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ .

Untuk  $n = 3$ , persamaan (2.9) menjadi

$$a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0. \quad (2.10)$$

Akar-akar persamaan (2.10) akan bernilai negatif jika dan hanya jika  $a_0, a_1, a_2, a_3 > 0$  dan  $a_1a_2 - a_0a_3 > 0$

(Murray, 2002).

## 2.4 Angka Reproduksi Dasar

Pada model epidemi, angka reproduksi dasar menyatakan banyaknya individu baru terinfeksi yang disebabkan satu individu terinfeksi sebelumnya selama proses penularan penyakit dalam suatu populasi rentan. Dalam hal ini angka reproduksi dasar ( $R_0$ ) digunakan untuk menentukan ada atau tidaknya penyakit dalam suatu populasi. Jika  $R_0 < 1$ , maka setiap individu terinfeksi menyebabkan rata-rata kurang dari satu individu terinfeksi baru. Dengan kata lain dapat diprediksi bahwa infeksi akan bersih dari populasi. Jika  $R_0 > 1$ , maka individu terinfeksi menyebabkan rata-rata lebih dari satu individu terinfeksi baru. Infeksi akan meluas dan menjadi wabah dalam suatu populasi

(Hefferman, dkk., 2005).

## 2.5 Matriks Generasi Selanjutnya

Misalkan  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ , dengan  $x_i \geq 0$  merupakan jumlah individu pada kompartemen ke- $i$ . Misalkan bahwa  $m$  kompartemen pertama merupakan kompartemen yang berkorespondensi dengan individu terinfeksi, dengan nilai  $m \leq n$ . Didefinisikan  $X_S$  merupakan himpunan semua kompartemen bebas penyakit, yaitu sebagai berikut.

$$X_S = \{\vec{x} \geq \vec{0} \mid x_i = 0, i = 1, \dots, m\}.$$

Misalkan  $\mathcal{F}_i(\vec{x})$  menyatakan tingkat munculnya infeksi baru di kompartemen  $i$ ,  $\mathcal{V}_i^+(\vec{x})$  menyatakan tingkat perpindahan individu ke kompartemen  $i$ , dan  $\mathcal{V}_i^-(\vec{x})$  menyatakan tingkat perpindahan individu keluar dari kompartemen  $i$ . Diasumsikan setiap fungsi minimal memiliki turunan kedua secara kontinu terhadap tiap variabel. Model penyebaran penyakit terdiri atas kondisi awal tidak negatif dengan sistem persamaan sebagai berikut:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(\vec{x}) = \mathcal{F}_i(\vec{x}) - \mathcal{V}_i(\vec{x}), i = 1, \dots, n,$$

dengan  $\mathcal{V}_i = \mathcal{V}_i^-(\vec{x}) - \mathcal{V}_i^+(\vec{x})$ ,  $\mathcal{F}_i(\vec{x})$  dan  $f_i(\vec{x})$  memenuhi asumsi-asumsi berikut:

1. jika  $\vec{x} \geq 0$  maka  $\mathcal{F}_i(\vec{x})$ ,  $\mathcal{V}_i^-$  dan  $\mathcal{V}_i^+ \geq 0$  untuk  $i = 1, \dots, n$ ,
2. jika  $x_i = 0$  maka  $\mathcal{V}_i^- = 0$ . Khususnya jika  $\vec{x} \in X_S$  maka  $\mathcal{V}_i^- = 0$  untuk  $i = 1, \dots, n$ ,
3.  $\mathcal{F}_i = 0$  jika  $i > m$ ,
4. jika  $\vec{x} \in X_S$ , maka  $\mathcal{F}_i(\vec{x}) = 0$  dan  $\mathcal{V}_i^+(\vec{x}) = 0$  untuk  $i = 1, \dots, m$ ,
5. jika  $\mathcal{F}(\vec{x})$  adalah himpunan yang anggotanya diset nol maka semua nilai eigen matriks Jacobi  $\mathcal{F}_i(\vec{x}) - \mathcal{V}_i(\vec{x})$  pada titik kesetimbangan bebas penyakit memiliki nilai eigen yang seluruh bagian realnya negatif.

**Lemma 2. 1**

Jika  $x_0$  adalah titik kesetimbangan bebas penyakit dan  $f_i(x)$  memenuhi asumsi 1 sampai asumsi 5 maka  $D\mathcal{F}(x_0)$  dan  $D\mathcal{V}(x_0)$  adalah sebagai berikut

$$D\mathcal{F}(x_0) = \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D\mathcal{V}(x_0) = \begin{bmatrix} V & 0 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix},$$

dengan  $F$  dan  $V$  adalah matriks  $m \times m$  yang didefinisikan sebagai berikut

$$F = \left[ \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial x_j}(x_0) \right], \text{ dan } V = \left[ \frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial x_j}(x_0) \right], \text{ dengan } i \geq 1, j \leq m.$$

Matriks  $F$  tidak negatif dan  $V$  tidak singular,  $V^{-1}$  adalah tidak negatif dan semua nilai eigen  $J_4$  bernilai positif dengan

$$J_4 = \left[ \frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial x_j}(x_0) \right] \text{ untuk } i, j > m,$$

dan

$$J_3 = \left[ \frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial x_j}(x_0) \right] \text{ untuk } i > m, j \leq m.$$

Matriks generasi selanjutnya adalah  $FV^{-1}$  dan himpunan  $R_0 = \eta(FV^{-1})$ , dengan  $\eta(FV^{-1})$  merupakan radius spektral matriks  $FV^{-1}$

(Driessche dan Watmough, 2002).

## 2.6 Analisis Kestabilan Global

### Definisi 2.6.1 (Fungsi Lyapunov Lemah)

Misalkan  $\vec{x}^*$  adalah suatu titik kesetimbangan persamaan diferensial  $\frac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x})$ , suatu fungsi  $\mathcal{L}: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$  disebut Lyapunov lemah untuk  $\vec{x}^*$  jika terdapat suatu persekitaran  $\Omega \in \mathfrak{R}^n$  pada  $\vec{x}^*$  yang memenuhi kondisi berikut

1.  $\mathcal{L}(\vec{x}^*) = 0$  dan  $\mathcal{L}(\vec{x}) > 0, \forall \vec{x} \neq \vec{x}^* \in \Omega$
2.  $\mathcal{L}'(\vec{x}) \leq 0, \forall \vec{x} \in \Omega$

(Alligood dkk, 2000).

### Definisi 2.6.2 (Fungsi Lyapunov Kuat)

Fungsi  $\mathcal{L}$  disebut fungsi Lyapunov kuat untuk  $\vec{x}^*$  jika terdapat suatu persekitaran  $\Omega$  pada  $\vec{x}^*$  yang memenuhi kondisi (1) pada Definisi 2.6.1 dan  $\mathcal{L}'(\vec{x}) < 0, \forall \vec{x} \neq \vec{x}^*$  dengan  $\vec{x} \in \Omega$

(Alligood dkk, 2000).

### Teorema 2.4 (Kestabilan Global dengan Fungsi Lyapunov)

Misalkan  $\vec{x}^*$  adalah suatu titik kesetimbangan persamaan diferensial  $\frac{d\vec{x}}{dt} = f(\vec{x})$ , titik kesetimbangan  $\vec{x}^*$  bersifat

1. Stabil global jika terdapat suatu fungsi Lyapunov lemah untuk  $\vec{x}^*$
2. Stabil asimtotik global jika terdapat suatu fungsi Lyapunov kuat untuk  $\vec{x}^*$

(Alligood dkk, 2000).

## 2.7 Pertaksamaan Rata-rata Aritmatika dan Geometri

Misalkan  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ . Rata-rata aritmatika yang diberikan adalah

$$AM(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_j.$$

Misalkan  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$ . Rata-rata geometri yang diberikan adalah

$$GM(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = \left( \prod_{j=1}^n a_j \right)^{\frac{1}{n}}.$$

**Teorema 2.5 (Pertaksamaan Rata-rata Aritmatika dan Geometri)**

Misalkan  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}^+$ , dengan  $n \geq 2$  maka

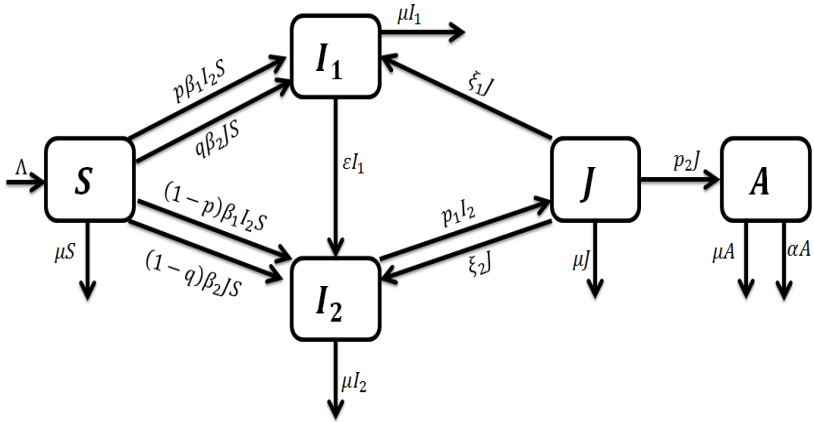
$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}. \quad (2.11)$$

Pertidaksamaan (2.11) menjadi sebuah persamaan jika dan hanya jika  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$

(Peter, 2014).

**2.8 Model Epidemii HIV/AIDS dengan Dua Tahap Laten dan Pengobatan**

Model epidemii HIV/AIDS dengan dua tahap laten dan pengobatan terdiri dari 5 subpopulasi, yang masing-masing diwakili oleh suatu kompartemen. Kompartemen  $S$  mewakili subpopulasi rentan, kompartemen  $I_1$  mewakili subpopulasi *slow* laten, kompartemen  $I_2$  mewakili subpopulasi *fast* laten, kompartemen  $J$  mewakili subpopulasi simptomatik dan kompartemen  $A$  mewakili subpopulasi yang sudah terjangkit AIDS. Arus perpindahan individu dari subpopulasi-subpopulasi secara skematis disajikan pada Gambar 2.1



**Gambar 2.1** Diagram kompartemen model epidemi HIV/AIDS dengan dua tahap laten dan pengobatan

dengan

$\Lambda$  = laju kelahiran alami,

$\beta_1$  = koefisien transmisi dari individu rentan ke individu *slow* laten dan *fast* laten karena terjadi interaksi antara individu rentan dengan individu *fast* laten,

$\beta_2$  = koefisien transmisi dari individu rentan ke individu *slow* laten dan *fast* laten karena terjadi interaksi antara individu rentan dengan individu simptomatik,

$p$  = proporsi infeksi individu rentan oleh individu *fast* laten menjadi individu *slow* laten,

$q$  = proporsi infeksi individu rentan oleh individu simptomatik menjadi individu *slow* laten,

$\varepsilon$  = laju perubahan individu dari tahap ( $I_1$ ) ke tahap ( $I_2$ ),

$p_1$  = laju perubahan individu dari tahap ( $I_2$ ) ke tahap ( $J$ ),

$p_2$  = laju perubahan individu dari tahap  $J$  ke tahap ( $A$ ),

$\xi_1$  = laju pengobatan dari tahap ( $J$ ) ke tahap ( $I_1$ ),

$\xi_2$  = laju pengobatan dari tahap ( $J$ ) ke tahap ( $I_2$ ),

$\mu$  = laju kematian alami,

$\alpha$  = laju kematian akibat penyakit AIDS.

Berdasarkan model kompartemen pada Gambar 2.1 dapat dijelaskan laju perubahan subpopulasi rentan, subpopulasi *slow* laten, subpopulasi *fast* laten, subpopulasi simptomatik dan subpopulasi terjangkit AIDS sebagai berikut.

### 2.8.1 Laju perubahan subpopulasi rentan

Individu yang baru lahir masuk ke dalam subpopulasi rentan karena mempunyai kemungkinan terinfeksi. Laju perubahan subpopulasi rentan berbanding lurus dengan laju kelahiran alami per satuan waktu, dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda.$$

Adanya interaksi antara individu rentan dengan individu tahap *fast* laten mengakibatkan individu rentan terinfeksi dan masuk ke dalam subpopulasi laten dengan koefisien transmisi  $\beta_1$ . Individu rentan yang terinfeksi dan tidak pernah mengidap penyakit kronis akan masuk ke dalam subpopulasi *slow* laten dengan proporsi infeksi  $p$ , sedangkan individu yang pernah mengidap penyakit kronis akan masuk ke dalam subpopulasi *fast* laten dengan proporsi infeksi  $1 - p$ . Laju perubahan subpopulasi rentan berbanding lurus dengan berkurangnya individu rentan akibat kontak langsung dengan individu pada tahap *fast* laten persatuan waktu, dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\frac{dS}{dt} = -p\beta_1 I_2 S - (1 - p)\beta_1 I_2 S.$$

Adanya interaksi antara individu rentan dengan individu tahap simptomatik mengakibatkan individu rentan terinfeksi dan masuk ke dalam subpopulasi laten dengan koefisien transmisi  $\beta_2$ . Individu rentan yang terinfeksi dan tidak pernah mengidap penyakit kronis akan masuk ke dalam subpopulasi *slow* laten dengan proporsi infeksi  $q$ , sedangkan individu yang pernah mengidap penyakit kronis akan masuk ke dalam subpopulasi *fast* laten dengan proporsi infeksi  $1 - q$ . Laju perubahan subpopulasi rentan berbanding lurus dengan berkurangnya individu rentan akibat kontak langsung dengan individu pada tahap simptomatik persatuan waktu, dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\frac{dS}{dt} = -q\beta_2 JS - (1 - q)\beta_2 JS.$$

Kematian alami merupakan kematian yang tidak dipengaruhi oleh penularan penyakit. Jumlah subpopulasi individu rentan dapat berkurang akibat kematian alami. Parameter  $\mu$  menyatakan laju kematian alami sehingga perubahan subpopulasi rentan berbanding



lurus dengan berkurangnya individu rentan karena kematian alami, dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\frac{dS}{dt} = -\mu S.$$

Dari uraian tersebut, model laju perubahan subpopulasi rentan persatuan waktu yaitu

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - p\beta_1 I_2 S - (1-p)\beta_1 I_2 S - q\beta_2 JS - (1-q)\beta_2 JS - \mu S,$$

dapat disederhanakan menjadi

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \beta_1 I_2 S - \beta_2 JS - \mu S. \quad (2.12)$$

### 2.8.2 Laju perubahan subpopulasi tahap *slow* laten

Adanya interaksi individu rentan dengan individu pada tahap *fast* laten dan tahap simptomatik mengakibatkan jumlah individu pada tahap *slow* laten bertambah. Laju perubahan subpopulasi tahap *slow* laten berbanding lurus dengan pertambahan jumlah individu pada tahap *slow* laten, dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\frac{dI_1}{dt} = p\beta_1 I_2 S + q\beta_2 JS.$$

Individu yang berada pada tahap *slow* laten dapat berubah menjadi individu pada tahap *fast* laten dengan laju perubahan  $\varepsilon$ , sehingga mengurangi jumlah individu pada subpopulasi *slow* laten. Selain itu, kematian alami juga mampu mengurangi individu pada subpopulasi *slow* laten. laju kematian alami dinyatakan dalam parameter  $\mu$ . Laju perubahan subpopulasi *slow* laten berbanding lurus dengan berkurangnya jumlah individu pada tahap *slow* laten, dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\frac{dI_1}{dt} = -(\varepsilon + \mu)I_1.$$

Adanya pengobatan pada individu di tahap simptomatik, mengakibatkan individu yang berada di tahap simptomatik dapat kembali ke tahap *slow* laten. laju pengobatan dari tahap simptomatik kembali ke tahap *slow* laten dinyatakan dalam parameter  $\xi_1$ .

Laju perubahan subpopulasi tahap *slow* laten karena pengobatan pada tahap simptomatik dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\frac{dI_1}{dt} = \xi_1 J.$$

Dari uraian tersebut, model laju perubahan subpopulasi tahap *slow laten* persatuan waktu yaitu

$$\frac{dI_1}{dt} = p\beta_1 I_2 S + q\beta_2 J S - (\varepsilon + \mu) I_1 + \xi_1 J. \quad (2.13)$$

### 2.8.3 Laju perubahan subpopulasi tahap *fast* laten

Adanya interaksi individu rentan dengan individu tahap *fast* laten dan individu pada tahap simptomatik mengakibatkan jumlah individu pada tahap *fast* laten bertambah. Laju perubahan subpopulasi tahap *fast* laten berbanding lurus dengan pertambahan jumlah individu pada tahap *fast* laten, dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\frac{dI_2}{dt} = (1 - p)\beta_1 I_2 S + (1 - q)\beta_2 J S.$$

Perpindahan individu dari tahap *slow* laten ke tahap *fast* laten dengan laju  $\varepsilon$  mengakibatkan perubahan jumlah subpopulasi di tahap *fast* laten. Laju perubahan subpopulasi tahap *fast* laten karena perpindahan tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\frac{dI_2}{dt} = \varepsilon I_1.$$

Individu yang berada pada tahap *fast* laten dapat berubah menjadi individu pada tahap simptomatik dengan laju perubahan  $p_1$ , sehingga mengurangi jumlah individu pada subpopulasi *fast* laten. Selain itu, kematian alami juga mampu mengurangi individu pada subpopulasi *fast* laten. Laju kematian alami dinyatakan dalam parameter  $\mu$ . Laju perubahan subpopulasi *fast* laten berbanding lurus dengan berkurangnya jumlah individu pada tahap *fast* laten, dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\frac{dI_2}{dt} = -(p_1 + \mu) I_2.$$

Adanya pengobatan pada individu di tahap simptomatik, mengakibatkan individu yang sudah berada di tahap simptomatik dapat kembali ke tahap *fast* laten. Laju pengobatan dari tahap simptomatik kembali ke tahap *fast* laten dinyatakan dalam parameter  $\xi_2$ . Laju perubahan subpopulasi tahap *fast* laten karena pengobatan pada tahap simptomatik dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\frac{dI_2}{dt} = \xi_2 J.$$

Dari uraian tersebut, model laju perubahan subpopulasi tahap *fast* laten persatuan waktu yaitu

$$\frac{dI_2}{dt} = (1 - p)\beta_1 I_2 S + (1 - q)\beta_2 JS + \varepsilon I_1 - (p_1 + \mu)I_2 + \xi_2 J. \quad (2.14)$$

#### 2.8.4 Laju perubahan subpopulasi tahap simptomatik

Perpindahan individu dari tahap *fast* laten ke tahap simptomatik dengan laju  $p_1$  mengakibatkan perubahan jumlah subpopulasi di tahap simptomatik. Laju perubahan subpopulasi tahap simptomatik karena perpindahan tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\frac{dJ}{dt} = p_1 I_2.$$

Pemberian terapi untuk individu pada subpopulasi simptomatik yang dapat berpindah ke subpopulasi *slow* laten dan *fast* laten dengan laju perpindahan berturut-turut adalah  $\xi_1$  dan  $\xi_2$  dapat mengurangi jumlah individu pada subpopulasi tahap simptomatik. Laju perubahan subpopulasi simptomatik karena pengobatan, dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\frac{dJ}{dt} = -(\xi_1 + \xi_2)J.$$

Terapi pengobatan yang diberikan pada tahap simptomatik berfungsi untuk memperlambat penyebaran virus HIV dalam tubuh individu. Lambat laun kekebalan tubuh individu akan terus menurun dan individu tersebut akan terkena AIDS dan berpindah ke dalam subpopulasi berpenyakit AIDS. Laju perubahan dari tahap

simtomatik ke tahap berpenyakit AIDS dinyatakan dalam parameter  $p_2$ . Selain itu, kematian alami juga mampu mengurangi individu pada subpopulasi simtomatik. laju kematian alami dinyatakan dalam parameter  $\mu$ . Laju perubahan subpopulasi simtomatik berbanding lurus dengan berkurangnya jumlah individu pada tahap simtomatik, dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\frac{dJ}{dt} = -(p_2 + \mu)J.$$

Dari uraian tersebut, model laju perubahan subpopulasi tahap simtomatik persatuan waktu yaitu

$$\frac{dJ}{dt} = p_1 I_2 - (\xi_1 + \xi_2 + p_2 + \mu)J. \quad (2.15)$$

### 2.8.5 Laju perubahan subpopulasi berpenyakit AIDS

Perpindahan individu dari tahap simtomatik ke subpopulasi berpenyakit AIDS dengan laju perubahan  $p_2$  mengakibatkan perubahan jumlah subpopulasi berpenyakit AIDS. Laju perubahan subpopulasi berpenyakit AIDS karena perpindahan tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\frac{dA}{dt} = p_2 J$$

Pada subpopulasi berpenyakit AIDS terjadi kematian alami juga yang mampu mengurangi individu pada subpopulasi berpenyakit AIDS. Laju kematian alami dinyatakan dalam parameter  $\mu$ . Selain karena kematian alami, individu pada subpopulasi berpenyakit AIDS akan mati karena penyakit AIDS. Laju kematian individu karena penyakit AIDS dinyatakan dalam parameter  $\alpha$ . Laju perubahan subpopulasi berpenyakit AIDS karena kematian, dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\frac{dA}{dt} = -(\mu + \alpha)A.$$

Dari uraian tersebut, model laju perubahan subpopulasi berpenyakit AIDS persatuan waktu yaitu

$$\frac{dA}{dt} = p_2 J - (\mu + \alpha)A. \quad (2.16)$$

Berdasarkan persamaan (2.15), (2.16), (2.17), (2.18) dan (2.19) diperoleh model epidemi HIV/AIDS dengan dua tahap laten dan pengobatan sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= \Lambda - (\beta_1 I_2 S + \beta_2 J S) - \mu S, \\
\frac{dI_1}{dt} &= p\beta_1 I_2 S + q\beta_2 J S - (\varepsilon + \mu)I_1 + \xi_1 J, \\
\frac{dI_2}{dt} &= (1-p)\beta_1 I_2 S + (1-q)\beta_2 J S + \varepsilon I_1 - (p_1 + \mu)I_2 + \xi_2 J, \\
\frac{dJ}{dt} &= p_1 I_2 - (\xi_1 + \xi_2 + p_2 + \mu)J, \\
\frac{dA}{dt} &= p_2 J - (\mu + \alpha)A.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Misalkan  $b_1 = \varepsilon + \mu$ ,  $b_2 = p_1 + \mu$ ,  $b_3 = \xi_1 + \xi_2 + p_2 + \mu$  dan  $b_4 = \mu + \alpha$  maka persamaan (2.20) menjadi

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= \Lambda - (\beta_1 I_2 S + \beta_2 J S) - \mu S, \\
\frac{dI_1}{dt} &= p\beta_1 I_2 S + q\beta_2 J S + \xi_1 J - b_1 I_1, \\
\frac{dI_2}{dt} &= (1-p)\beta_1 I_2 S + (1-q)\beta_2 J S + \varepsilon I_1 + \xi_2 J - b_2 I_2, \\
\frac{dJ}{dt} &= p_1 I_2 - b_3 J, \\
\frac{dA}{dt} &= p_2 J - b_4 A,
\end{aligned} \tag{2.18}$$

dengan kondisi awal

$$S(0) \geq 0, I_1(0) \geq 0, I_2(0) \geq 0, J(0) \geq 0, A(0) \geq 0.$$

Total individu dalam populasi didefinisikan sebagai  $N(t) = S(t) + I_1(t) + I_2(t) + J(t) + A(t)$  dan diperoleh sebagai berikut

$$\frac{dN}{dt} = \Lambda - \mu N - \alpha A$$

$$\frac{dN}{dt} \leq \Lambda - \mu N.$$

Untuk mendapatkan solusi umum  $N(t)$  digunakan metode pemisahan variabel sebagai berikut

$$\frac{dN}{\Lambda - \mu N} \leq dt$$

$$\int \frac{dN}{\Lambda - \mu N} \leq \int dt$$

$$-\frac{1}{\mu} \ln|\Lambda - \mu N| \leq t$$

$$|\Lambda - \mu N| \leq e^{-\mu t}$$

$$|\mu N - \Lambda| \leq e^{-\mu t}$$

$$\mu N - \Lambda \leq e^{-\mu t}$$

$$\mu N \leq e^{-\mu t} + \Lambda$$

$$N \leq \frac{e^{-\mu t}}{\mu} + \frac{\Lambda}{\mu}.$$

Dengan demikian didapatkan  $N(t) \leq \frac{e^{-\mu t}}{\mu} + \frac{\Lambda}{\mu}$ , sehingga

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \frac{\Lambda}{\mu}.$$

(Huo dan Feng, 2013).

## BAB III HASIL DAN PEMBAHASAN

### 3.1 Titik Keseimbangan

Titik keseimbangan sistem persamaan (2.18) diperoleh ketika  $\frac{dS}{dt} = \frac{dI_1}{dt} = \frac{dI_2}{dt} = \frac{dJ}{dt} = \frac{dA}{dt} = 0$ , yaitu

$$\begin{aligned}\Lambda - (\beta_1 I_2 S + \beta_2 J S) - \mu S &= 0, \\ p\beta_1 I_2 S + q\beta_2 J S + \xi_1 J - b_1 I_1 &= 0, \\ (1-p)\beta_1 I_2 S + (1-q)\beta_2 J S + \varepsilon I_1 + \xi_2 J - b_2 I_2 &= 0, \\ p_1 I_2 - b_3 J &= 0, \\ p_2 J - b_4 A &= 0.\end{aligned}$$

Berdasarkan perhitungan pada Lampiran 1 diperoleh dua titik keseimbangan yaitu titik keseimbangan bebas penyakit  $E^0 = (S^0, I_1^0, I_2^0, J^0, A^0) = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0, 0\right)$  dan titik keseimbangan endemi  $E^* = (S^*, I_1^*, I_2^*, J^*, A^*)$ , dengan

$$\begin{aligned}S^* &= \frac{\Lambda}{\beta_1 \frac{b_3}{p_1} J^* + \beta_2 J^* + \mu}, \\ I_1^* &= \frac{1}{b_1} \left( p\beta_1 \frac{\Lambda b_3}{\beta_1 b_3 J^* + \beta_2 J^* p_1 + \mu p_1} + q\beta_2 \frac{\Lambda p_1}{\beta_1 b_3 J^* + \beta_2 J^* p_1 + \mu p_1} + \xi_1 \right) J^*, \\ I_2^* &= -b_3 \frac{\beta_1 b_3 \Lambda ((1-p)b_1 + \varepsilon p) + \beta_2 p_1 \Lambda (\varepsilon q + (1-q)b_1) + \mu (-b_1 b_2 b_3 + \varepsilon \xi_1 p_1 + \xi_2 b_1 p_1)}{\beta_1 b_3 (\varepsilon \xi_1 p_1 + \xi_2 b_1 p_1 - b_1 b_2 b_3) + \beta_2 p_1 (\varepsilon \xi_1 p_1 + \xi_2 b_1 p_1 - b_1 b_2 b_3)}, \\ J^* &= \frac{p_1 I_2^*}{b_3} \mu, \\ A^* &= \frac{p_2}{b_4} J^*.\end{aligned}$$

### 3.2 Angka Reproduksi Dasar

Penentuan angka reproduksi dasar sangat berguna dalam penentuan terjadi atau tidak terjadinya penyebaran sebuah penyakit dalam populasi tertentu. Secara spesifik, didefinisikan angka reproduksi dasar  $R_0$  model (2.18) sebagai angka infeksi HIV/AIDS

yang disebabkan oleh satu individu terinfeksi HIV/AIDS. Penentuan  $R_0$  dilakukan dengan menggunakan metode matriks generasi selanjutnya.

Misalkan  $\vec{x} = (I_1, I_2, J, A, S)^T$ ,

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \mathcal{F} - \mathcal{V},$$

dengan

$$\mathcal{F}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} p\beta_1 I_2 S + q\beta_2 JS \\ (1-p)\beta_1 I_2 S + (1-q)\beta_2 JS \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

dan

$$\mathcal{V}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} b_1 I_1 - \xi_1 J \\ b_2 I_2 - \varepsilon I_1 - \xi_2 J \\ b_3 J - p_1 I_2 \\ b_4 A - p_2 J \\ \beta_1 I_2 S + \beta_2 JS + \mu S - \Lambda \end{bmatrix}.$$

Misalkan  $D\mathcal{F}$  dan  $D\mathcal{V}$  masing-masing adalah matriks Jacobi  $\mathcal{F}$  dan  $\mathcal{V}$  pada kondisi bebas penyakit  $E^0 = (S^0, I_1^0, I_2^0, J^0, A^0)$ . Dengan demikian diperoleh

$$D\mathcal{F}(E^0) = \begin{bmatrix} F_{4 \times 4} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D\mathcal{V}(E^0) = \begin{bmatrix} V_{4 \times 4} & 0 \\ J_3 & J_4 \end{bmatrix},$$

dengan

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} & \beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} & 0 \end{pmatrix}, \quad J_4 = \mu,$$

$$F(E^0) = \begin{bmatrix} 0 & p\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} & q\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} & 0 \\ 0 & (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} & (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$



dan

$$V(E^0) = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & -\xi_1 & 0 \\ -\varepsilon & b_2 & -\xi_2 & 0 \\ 0 & -p_1 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & -p_2 & b_4 \end{bmatrix}.$$

$F$  dan  $V$  masing-masing adalah matriks Jacobi  $\mathcal{F}$  dan  $\mathcal{V}$  yang terdiri dari kelompok populasi individu terinfeksi, yaitu populasi *slow* laten ( $I_1$ ), populasi *fast* laten ( $I_2$ ), populasi simtomatik ( $J$ ), dan populasi berpenyakit AIDS ( $A$ ).

Sebelum menentukan matriks generasi selanjutnya, terlebih dahulu ditentukan invers matriks  $V$ , yaitu

$$V^{-1} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} b_2 b_3 b_4 - b_4 p_1 \xi_2 & b_4 p_1 \xi_1 & b_2 b_4 \xi_1 & 0 \\ \varepsilon b_3 b_4 & b_1 b_3 b_4 & b_1 b_4 \xi_2 + b_4 \varepsilon \xi_1 & 0 \\ \varepsilon p_1 b_4 & b_1 p_1 b_4 & b_1 b_2 b_4 & 0 \\ \varepsilon p_1 p_2 & b_1 p_1 p_2 & p_2 b_1 b_2 & \frac{1}{b_4} L \end{bmatrix},$$

dengan  $L = b_1 b_2 b_3 b_4 - b_1 b_4 p_1 \xi_2 - b_4 p_1 \xi_1 \varepsilon$ .

Berdasarkan matriks  $F$  dan  $V^{-1}$ , dapat ditentukan matriks generasi selanjutnya untuk sistem (2.18), yaitu

$$FV^{-1} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} pH + qG & pK + qM & pQ + qP & 0 \\ (1-p)H + (1-q)G & (1-p)K + (1-q)M & (1-p)Q + (1-q)P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dengan

$$H = \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} \varepsilon b_3 b_4, \quad G = \beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} \varepsilon p_1 b_4, \quad K = \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 b_3 b_4,$$

$$M = \beta_2 b_1 p_1 b_4 \frac{\Lambda}{\mu}, \quad P = \beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 b_2 b_4, \quad Q = \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} (b_1 b_4 \xi_2 + b_4 \varepsilon \xi_1).$$

Ditentukan nilai eigen matriks  $FV^{-1}$ , yaitu

$$|FV^{-1} - \lambda I| = 0.$$

Penjabaran mencari nilai eigen  $FV^{-1}$  dapat dilihat pada Lampiran 2, diperoleh

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0, \text{ dan}$$

$$\lambda_4 = \frac{[\beta_1 b_3 (\varepsilon p + b_1 (1 - p)) + \beta_2 p_1 (\varepsilon q + b_1 (1 - q))] \frac{\Lambda}{\mu}}{b_1 b_2 b_3 - (\varepsilon \xi_1 + b_1 \xi_2) p_1}.$$

Angka reproduksi dasar  $R_0$  adalah radius spektral dari matriks generasi selanjutnya  $FV^{-1}$ , yaitu

$$R_0 = \eta(FV^{-1})$$

$$R_0 = \max\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$$

$$R_0 = \frac{[\beta_1 b_3 (\varepsilon p + b_1 (1 - p)) + \beta_2 p_1 (\varepsilon q + b_1 (1 - q))] \frac{\Lambda}{\mu}}{b_1 b_2 b_3 - (\varepsilon \xi_1 + b_1 \xi_2) p_1}.$$

Angka reproduksi dasar menyatakan banyaknya individu terinfeksi baru yang disebabkan satu individu terinfeksi, sehingga angka reproduksi dasar  $R_0$  harus bernilai positif. Oleh karena itu disyaratkan  $b_1 b_2 b_3 > (\varepsilon \xi_1 + b_1 \xi_2) p_1$ .

### 3.3 Syarat Eksistensi Titik Keseimbangan Endemi

Titik keseimbangan  $E^* = (S^*, I_1^*, I_2^*, J^*, A^*)$  dapat dinyatakan dalam  $R_0$  yang dapat dilihat pada Lampiran 3, diperoleh

$$S^* = \frac{\Lambda}{\mu R_0},$$

$$I_1^* = \frac{1}{b_1} \left( \frac{p \beta_1 \Lambda b_3 + q \beta_2 \Lambda p_1}{R_0} + \xi_1 p_1 \mu \right) \left( \frac{R_0 - 1}{\beta_1 b_3 + \beta_2 p_1} \right),$$

$$I_2^* = \frac{b_3}{p_1} \left( \frac{R_0 - 1}{\beta_1 b_3 + \beta_2 p_1} \right) \mu,$$

$$J^* = p_1 \left( \frac{R_0 - 1}{\beta_1 b_3 + \beta_2 p_1} \right) \mu,$$

$$A^* = \frac{p_2}{b_4} \left( p_1 \left( \frac{R_0 - 1}{\beta_1 b_3 + \beta_2 p_1} \right) \mu \right).$$

Oleh karena itu, eksistensi titik keseimbangan endemi  $E^* = (S^*, I_1^*, I_2^*, J^*, A^*)$  ditentukan berdasarkan  $R_0$ . Jika  $R_0 < 1$ , maka diperoleh  $I_1^*, I_2^*, J^*, A^* < 0$ , sehingga titik keseimbangan endemi tidak

eksis. Jika  $R_0 = 1$ , maka diperoleh  $S^* = \frac{\Lambda}{\mu}, I_1^* = I_2^* = J^* = A^* = 0$ , sehingga titik kesetimbangan endemi sama dengan titik kesetimbangan bebas penyakit. Jika  $R_0 > 1$ , maka  $S^*, I_1^*, I_2^*, J^*, A^*$  bernilai positif, sehingga titik kesetimbangan endemi eksis. Berdasarkan uraian tersebut, jika  $R_0 \leq 1$  hanya terdapat titik kesetimbangan bebas penyakit, sedangkan jika  $R_0 > 1$  terdapat titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemi.

### 3.4 Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit $E^0$

#### 3.4.1 Analisis kestabilan lokal $E^0$

Berdasarkan sistem (2.18) diketahui bahwa sistem tersebut merupakan sistem nonlinear. Oleh karena itu, kestabilan lokal titik kesetimbangan diperoleh dengan melakukan linearisasi sistem (2.18). Diperoleh matriks Jacobi hasil linearisasi sebagai berikut

$$J = \begin{bmatrix} -\beta_1 I_2 - \beta_2 J - \mu & 0 & -\beta_1 S & -\beta_2 S & 0 \\ p\beta_1 I_2 + q\beta_2 J & -b_1 & p\beta_1 S & q\beta_2 S + \xi_1 & 0 \\ (1-p)\beta_1 I_2 + (1-q)\beta_2 J & \varepsilon & (1-p)\beta_1 S - b_2 & (1-q)\beta_2 S + \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_1 & -b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_2 & -b_4 \end{bmatrix}.$$

Matriks Jacobi pada titik kesetimbangan  $E^0$  adalah

$$J(E^0) = \begin{bmatrix} -\mu & 0 & -\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} & -\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} & 0 \\ 0 & -b_1 & p\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} & q\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} + \xi_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon & (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} - b_2 & (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} + \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_1 & -b_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_2 & -b_4 \end{bmatrix}.$$

(3.1)

Persamaan karakteristik dari matriks (3.1) adalah

$$\begin{vmatrix}
-\mu - \lambda & 0 & -\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} & -\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} & 0 \\
0 & -b_1 - \lambda & p\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} & q\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} + \xi_1 & 0 \\
0 & \varepsilon & (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} - b_2 - \lambda & (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} + \xi_2 & 0 \\
0 & 0 & p_1 & -b_3 - \lambda & 0 \\
0 & 0 & 0 & p_2 & -b_4 - \lambda
\end{vmatrix} = 0$$

$$(-b_4 - \lambda)(-\mu - \lambda) \begin{vmatrix}
-b_1 - \lambda & p\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} & q\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} + \xi_1 \\
\varepsilon & (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} - b_2 - \lambda & (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} + \xi_2 \\
0 & p_1 & -b_3 - \lambda
\end{vmatrix} = 0,$$

(3.2)

Dari persamaan (3.2) diperoleh

$$(-b_4 - \lambda) = 0 \quad (3.3)$$

atau

$$(-\mu - \lambda) = 0 \quad (3.4)$$

atau

$$\begin{vmatrix}
-b_1 - \lambda & p\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} & q\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} + \xi_1 \\
\varepsilon & (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} - b_2 - \lambda & (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} + \xi_2 \\
0 & p_1 & -b_3 - \lambda
\end{vmatrix} = 0. \quad (3.5)$$

Diperoleh akar karakteristik dari persamaan (3.3) yaitu  $\lambda_1 = -b_4$ , akar karakteristik dari persamaan (3.4) yaitu  $\lambda_1 = -\mu$ , dan akar karakteristik persamaan (3.5) dijabarkan pada Lampiran 4, diperoleh

$$a_0 \lambda^3 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda + a_3 = 0, \quad (3.6)$$

dengan

$$a_0 = 1,$$

$$a_1 = -(1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} + b_2 + b_3 + b_1,$$

$$\begin{aligned}
a_2 &= b_2 b_1 + b_1 b_3 + b_2 b_3 - (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} p_1 - \xi_2 p_1 - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 \\
&\quad - \varepsilon p \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_3, \\
a_3 &= b_2 b_1 b_3 - \varepsilon q \beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} p_1 - \varepsilon \xi_1 p_1 - (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 p_1 - \xi_2 b_1 p_1 \\
&\quad - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 b_3 - \varepsilon p \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_3,
\end{aligned}$$

Menurut Teorema 2.3, persamaan (3.6) akan mempunyai akar-akar negatif apabila

1.  $a_i > 0$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$
2.  $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$ .

Jika

$$R_0 = \frac{(\beta_1 b_3 ((1-p) b_1 + \varepsilon p) + \beta_2 p_1 (\varepsilon q + (1-q) b_1)) \frac{\Lambda}{\mu}}{b_1 b_2 b_3 - (\varepsilon \xi_1 + \xi_2 b_1) p_1} < 1,$$

maka diperoleh

$$\begin{aligned}
b_1 b_2 b_3 - (\varepsilon \xi_1 + \xi_2 b_1) p_1 &> (\beta_1 b_3 ((1-p) b_1 + \varepsilon p) + \beta_2 p_1 (\varepsilon q + (1-q) b_1)) \frac{\Lambda}{\mu} \\
b_1 b_2 b_3 &> (\beta_1 b_3 ((1-p) b_1 + \varepsilon p) + \beta_2 p_1 (\varepsilon q + (1-q) b_1)) \frac{\Lambda}{\mu} \\
&\quad + (\varepsilon \xi_1 + \xi_2 b_1) p_1. \tag{3.7}
\end{aligned}$$

Untuk membuktikan  $a_1 > 0$ , perhatikan

$$\begin{aligned}
a_1 &= b_2 + b_3 + b_1 - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} > 0 \\
&= \frac{1}{b_1 b_3} \left( b_1 b_2 b_3 + b_1 b_3^2 + b_1^2 b_3 - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 b_3 \right).
\end{aligned}$$

Berdasarkan pertidaksamaan (3.7) maka  $a_1 > 0$ .

Untuk membuktikan  $a_2 > 0$ , perhatikan

$$\begin{aligned}
a_2 &= b_2 b_1 + b_1 b_3 + b_2 b_3 - (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} p_1 - \xi_2 p_1 - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 \\
&\quad - \varepsilon p \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_3 > 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= b_1 b_3 + b_2 b_1 \frac{b_3}{b_3} - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 \frac{b_3}{b_3} - \frac{b_3}{b_3} \varepsilon p \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} \\
&\quad + b_2 b_3 \frac{b_1}{b_1} - (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} p_1 \frac{b_1}{b_1} - \xi_2 p_1 \frac{b_1}{b_1} - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_3 \frac{b_1}{b_1} \\
&= b_1 b_3 + \frac{1}{b_3} \left( b_2 b_1 b_3 - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 b_3 - b_3 \varepsilon p \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} \right) \\
&\quad + \frac{1}{b_1} \left( b_2 b_3 b_1 - (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} p_1 b_1 - \xi_2 p_1 b_1 - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_3 b_1 \right).
\end{aligned}$$

Berdasarkan pertidaksamaan (3.7) maka  $a_2 > 0$ .

Untuk membuktikan  $a_3 > 0$ , perhatikan

$$\begin{aligned}
a_3 &= b_2 b_1 b_3 - \varepsilon q \beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} p_1 - \varepsilon \xi_1 p_1 - (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 p_1 - \xi_2 b_1 p_1 \\
&\quad - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 b_3 - \varepsilon p \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_3 > 0 \\
&= b_2 b_1 b_3 - [(1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 b_3 + \varepsilon p \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_3 + \varepsilon q \beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} p_1 \\
&\quad + (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 p_1 + \varepsilon \xi_1 p_1 + \xi_2 b_1 p_1]
\end{aligned}$$

Berdasarkan pertidaksamaan (3.7) maka  $a_3 > 0$ .

Dengan demikian,  $a_0, a_1, a_2$ , dan  $a_3 > 0$ . Pembuktian  $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$  dapat dilihat pada Lampiran 5.

Persamaan (3.6) memenuhi Teorema 2.3, yaitu mempunyai akar-akar yang negatif. Oleh karena itu, titik kesetimbangan bebas penyakit  $E^0$  stabil asimtotik lokal. Berdasarkan uraian tersebut, kestabilan lokal titik kesetimbangan bebas penyakit  $E^0$  dapat dinyatakan dalam Teorema 3.1 berikut.

### **Teorema 3.1**

Jika  $R_0 < 1$  maka titik kesetimbangan bebas penyakit  $E^0$  stabil asimtotik lokal.

### 3.4.2 Analisis kestabilan global $E^0$

Laju perubahan variabel  $(I_1, I_2, J, A)$  dari sistem (2.18) dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{J} \\ \dot{A} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -b_1 & p\beta_1 S & q\beta_2 S + \xi_1 & 0 \\ \varepsilon & (1-p)\beta_1 S - b_2 & (1-q)\beta_2 S + \xi_2 & 0 \\ 0 & p_1 & -b_3 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & -b_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ J \\ A \end{bmatrix} \\
 &= \left( \begin{bmatrix} 0 & p\beta_1 S & q\beta_2 S & 0 \\ 0 & (1-p)\beta_1 S & (1-q)\beta_2 S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -b_1 & 0 & \xi_1 & 0 \\ \varepsilon & -b_2 & \xi_2 & 0 \\ 0 & p_1 & -b_3 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & -b_4 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ J \\ A \end{bmatrix} \\
 &= \left( S \begin{bmatrix} 0 & p\beta_1 & q\beta_2 & 0 \\ 0 & (1-p)\beta_1 & (1-q)\beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -b_1 & 0 & \xi_1 & 0 \\ \varepsilon & -b_2 & \xi_2 & 0 \\ 0 & p_1 & -b_3 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & -b_4 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ J \\ A \end{bmatrix} \\
 &= \left( S \frac{\mu}{\Lambda} \begin{bmatrix} 0 & p\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} & q\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} & 0 \\ 0 & (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} & (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -b_1 & 0 & \xi_1 & 0 \\ \varepsilon & -b_2 & \xi_2 & 0 \\ 0 & p_1 & -b_3 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & -b_4 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ J \\ A \end{bmatrix} \\
 &= \left( S \frac{\mu}{\Lambda} \begin{bmatrix} 0 & p\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} & q\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} & 0 \\ 0 & (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} & (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 & 0 & -\xi_1 & 0 \\ -\varepsilon & b_2 & -\xi_2 & 0 \\ 0 & -p_1 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & -p_2 & b_4 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ J \\ A \end{bmatrix} \\
 &= \left( S \frac{\mu}{\Lambda} F - V \right) \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ J \\ A \end{bmatrix} + (F - V) \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ J \\ A \end{bmatrix} \\
 &= (F - V) \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ J \\ A \end{bmatrix} + \left( S \frac{\mu}{\Lambda} F - F \right) \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ J \\ A \end{bmatrix} \\
 &= (F - V) \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ J \\ A \end{bmatrix} + \left( S \frac{\mu}{\Lambda} - 1 \right) F \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ J \\ A \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{bmatrix} I_1' \\ I_2' \\ J' \\ A' \end{bmatrix} = (F - V) \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ J \\ A \end{bmatrix} - \left(1 - S \frac{\mu}{\Lambda}\right) F \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ J \\ A \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

$I_1(t), I_2(t), J(t)$ , dan  $A(t)$  adalah solusi positif dan  $S \leq \frac{\Lambda}{\mu}$  untuk  $t \geq 0$ , sehingga persamaan (3.8) menjadi

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \\ \dot{J} \\ \dot{A} \end{bmatrix} \leq (F - V) \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ J \\ A \end{bmatrix}.$$

Dari Lemma 2.1 diketahui bahwa semua nilai eigen matriks  $(F - V)$  bernilai negatif. Menggunakan Teorema 2.1,  $(I_1, I_2, J, A)$  bersifat stabil asimtotik, sehingga  $(I_1, I_2, J, A) \rightarrow (0, 0, 0, 0)$  pada saat  $t \rightarrow \infty$  ketika  $R_0 < 1$ .  $N(t) = S + I_1 + I_2 + J + A \leq \frac{\Lambda}{\mu}$ , karena  $(I_1, I_2, J, A) \rightarrow (0, 0, 0, 0)$  sehingga  $S \rightarrow \frac{\Lambda}{\mu}$ . Dengan demikian  $(S, I_1, I_2, J, A) \rightarrow \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0, 0\right)$  pada saat  $t \rightarrow \infty$ .  $E^0$  stabil asimtotik global untuk  $R_0 < 1$ .

Berdasarkan uraian tersebut, kestabilan global titik kesetimbangan bebas penyakit  $E^0$  dinyatakan dalam Teorema 3.2 berikut.

### **Teorema 3.2**

Jika  $R_0 < 1$  maka titik kesetimbangan bebas penyakit  $E^0$  stabil asimtotik global.



### 3.5 Analisis Kestabilan Global Titik Keseimbangan Endemi

Didefinisikan fungsi Lyapunov

$$V(S, I_1, I_2, J, A) = \left( S - S^* - S^* \ln \frac{S}{S^*} \right) + B \left( I_1 - I_1^* - I_1^* \ln \frac{I_1}{I_1^*} \right) \\ + C \left( I_2 - I_2^* - I_2^* \ln \frac{I_2}{I_2^*} \right) + D \left( J - J^* - J^* \ln \frac{J}{J^*} \right),$$

dengan  $B, C, D > 0$  yang akan mengakibatkan  $V'(S, I_1, I_2, J, A) < 0$  pada  $\Omega = \{(S, I_1, I_2, J, A) | S, I_1, I_2, J, A > 0\}$ .

Selanjutnya, untuk memeriksa apakah fungsi tersebut merupakan fungsi Lyapunov kuat atau lemah, perlu diperiksa apakah fungsi  $V(S, I_1, I_2, J, A)$  memenuhi kondisi 1 pada Definisi 2.6.1, yaitu  $V(\vec{E}^*) = 0$  dan  $V(\vec{E}) > 0, \forall \vec{E} \in \Omega / \{\vec{E}^*\}$ .

a. Pembuktian  $V(E^*) = 0$

$$V(E^*) = V(S^*, I_1^*, I_2^*, J^*, A^*) \\ = \left( S^* - S^* - S^* \ln \frac{S^*}{S^*} \right) + B \left( I_1^* - I_1^* - I_1^* \ln \frac{I_1^*}{I_1^*} \right) \\ + C \left( I_2^* - I_2^* - I_2^* \ln \frac{I_2^*}{I_2^*} \right) + D \left( J^* - J^* - J^* \ln \frac{J^*}{J^*} \right) \\ = (0 - S^*(0)) + B(0 - I_1^*(0)) + C(0 - I_2^*(0)) \\ + D(0 - J^*(0)) \\ = 0$$

b. Pembuktian  $V(\vec{E}) > 0, \forall \vec{E} \in \Omega / \{\vec{E}^*\}$

Diketahui

$$V(S, I_1, I_2, J, A) = \left( S - S^* - S^* \ln \frac{S}{S^*} \right) + B \left( I_1 - I_1^* - I_1^* \ln \frac{I_1}{I_1^*} \right) \\ + C \left( I_2 - I_2^* - I_2^* \ln \frac{I_2}{I_2^*} \right) + D \left( J - J^* - J^* \ln \frac{J}{J^*} \right).$$

Misal  $g(S) = \left( S - S^* - S^* \ln \frac{S}{S^*} \right)$  dan  $g(S)$  terdefinisi pada domain  $S \in \mathbb{R}^+$ . Turunan pertama  $g(S)$  terhadap  $S$ , yaitu

$$g'(S) = \left(1 - \frac{S^*}{S}\right), \text{ dengan } S \in (0, \infty).$$

Titik stasioner  $g(S)$  diperoleh ketika  $g'(S) = 0$ . Nilai  $S$  yang memenuhi  $g'(S) = 0$  adalah ketika  $S = S^*$ . Jika  $S \in (0, S^*)$  maka berlaku  $g'(S) < 0$ . Di lain pihak, jika  $S \in (S^*, \infty)$  maka berlaku  $g'(S) > 0$ . Oleh karena itu,  $g(S)$  monoton turun pada selang  $(0, S^*)$  dan monoton naik pada selang  $(S^*, \infty)$ .

Berdasarkan uraian tersebut, jelas bahwa  $(S^*, 0)$  merupakan titik minimum  $g(S)$ . Karena 0 merupakan nilai minimum  $g(S)$  sehingga pasti berlaku  $g(S) > 0$  untuk  $S \in \Omega/S^*$ . Hal ini juga berlaku untuk membuktikan  $g(I_1) = B \left( I_1 - I_1^* - I_1^* \ln \frac{I_1}{I_1^*} \right) > 0$ ,  $g(I_2) = C \left( I_2 - I_2^* - I_2^* \ln \frac{I_2}{I_2^*} \right) > 0$ , dan  $g(J) = D \left( J - J^* - J^* \ln \frac{J}{J^*} \right) > 0$ . Terbukti bahwa  $V(S, I_1, I_2, J, A) > 0$ .

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa  $V'(S, I_1, I_2, J, A) < 0$ . Dengan menggunakan aturan rantai dilakukan penurunan terhadap fungsi  $V(S, I_1, I_2, J, A)$ , sehingga diperoleh

$$V'(S, I_1, I_2, J, A) = \frac{dV}{dS} \frac{dS}{dt} + \frac{dV}{dI_1} \frac{dI_1}{dt} + \frac{dV}{dI_2} \frac{dI_2}{dt} + \frac{dV}{dJ} \frac{dJ}{dt} + \frac{dV}{dA} \frac{dA}{dt}$$

$$V' = \left(1 - \frac{S^*}{S}\right) S' + B \left(1 - \frac{I_1^*}{I_1}\right) I_1' + C \left(1 - \frac{I_2^*}{I_2}\right) I_2' + D \left(1 - \frac{J^*}{J}\right) J',$$

dengan menstutitusikan nilai  $S', I_1', I_2'$  dan  $J'$  ke dalam persamaan  $V'$ , diperoleh

$$V' = \left(1 - \frac{S^*}{S}\right) [\Lambda - (\beta_1 I_2 S + \beta_2 J S) - \mu S] + B \left(1 - \frac{I_1^*}{I_1}\right)$$

$$\times [p\beta_1 I_2 S + q\beta_2 J S + \xi_1 J - b_1 I_1] + C \left(1 - \frac{I_2^*}{I_2}\right)$$

$$\times [(1-p)\beta_1 I_2 S + (1-q)\beta_2 J S + \varepsilon I_1 + \xi_2 J - b_2 I_2]$$

$$+ D \left(1 - \frac{J^*}{J}\right) [p_1 I_2 - b_3 J],$$

dengan menggunakan

$$\Lambda = \beta_1 I_2^* S^* + \beta_2 J^* S^* + \mu S^*,$$

$$b_1 = \frac{p\beta_1 I_2^* S^* + q\beta_2 J^* S^* + \mu S^*}{I_1^*},$$

$$b_2 = \frac{(1-p)\beta_1 I_2^* S^* + (1-q)\beta_2 J^* S^* + \varepsilon I_1^* + \xi_2 J^*}{I_2^*},$$

$$b_3 = \frac{p_1 I_2^*}{J^*},$$

diperoleh

$$\begin{aligned} V' = & \left(1 - \frac{S^*}{S}\right) [\beta_1 I_2^* S^* + \beta_2 J^* S^* + \mu S^* - (\beta_1 I_2 S + \beta_2 J S + \mu S)] \\ & + B \left(1 - \frac{I_1^*}{I_1}\right) \left[ p\beta_1 I_2 S + q\beta_2 J S + \xi_1 J - \frac{p\beta_1 I_2^* S^* + q\beta_2 J^* S^* + \mu S^*}{I_1^*} I_1 \right] \\ & + C \left(1 - \frac{I_2^*}{I_2}\right) [(1-p)\beta_1 I_2 S + (1-q)\beta_2 J S + \varepsilon I_1 + \xi_2 J \\ & - \frac{(1-p)\beta_1 I_2^* S^* + (1-q)\beta_2 J^* S^* + \varepsilon I_1^* + \xi_2 J^*}{I_2^*} I_2] \\ & + D \left(1 - \frac{J^*}{J}\right) \left[ p_1 I_2 - \frac{p_1 I_2^*}{J^*} J \right]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Misalkan  $\frac{S}{S^*} = x$ ,  $\frac{I_1}{I_1^*} = y$ ,  $\frac{I_2}{I_2^*} = z$ ,  $\frac{J}{J^*} = u$ , persamaan (3.9) menjadi

$$\begin{aligned} V' = & -\mu S^* \frac{(1-x)^2}{x} + \left(1 - \frac{1}{x}\right) [\beta_1 I_2^* S^* (1-xz) + \beta_2 J^* S^* (1-xu)] \\ & + B \left(1 - \frac{1}{y}\right) [p\beta_1 I_2^* S^* (xz-y) + q\beta_2 J^* S^* (xu-y) + \xi_1 J^* (u-y)] \\ & + C \left(1 - \frac{1}{z}\right) [(1-p)\beta_1 I_2^* S^* (xz-z) + (1-q)\beta_2 J^* S^* (xu-z) + \\ & \varepsilon I_1^* (y-z) + \xi_2 J^* (u-z)] + D \left(1 - \frac{1}{u}\right) [p_1 I_2^* (z-u)] \\ = & -\mu S^* \frac{(1-x)^2}{x} + \beta_1 I_2^* S^* \left(1 - xz - \frac{1}{x} + z\right) + \beta_2 J^* S^* \left(1 - xu - \frac{1}{x} + u\right) \\ & + B p \beta_1 I_2^* S^* \left(xz - y - \frac{xz}{y} + 1\right) + B q \beta_2 J^* S^* \left(xu - y - \frac{xu}{y} + 1\right) \\ & + B \xi_1 J^* \left(u - y - \frac{u}{y} + 1\right) + C (1-p) \beta_1 I_2^* S^* \left(xz - z - \frac{xz}{z} + 1\right) \\ & + C (1-q) \beta_2 J^* S^* \left(xu - z - \frac{xu}{z} + 1\right) + C \varepsilon I_1^* \left(y - z - \frac{y}{z} + 1\right) \\ & + C \xi_2 J^* \left(u - z - \frac{u}{z} + 1\right) + D p_1 I_2^* \left(z - u - \frac{z}{u} + 1\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\mu S^* \frac{(1-x)^2}{x} + [\beta_1 I_2^* S^* + \beta_2 J^* S^* + Bp\beta_1 I_2^* S^* + Bq\beta_2 J^* S^* + B\xi_1 J^* \\
&\quad + C(1-p)\beta_1 I_2^* S^* + C(1-q)\beta_2 J^* S^* + C\varepsilon I_1^* + C\xi_2 J^* + Dp_1 I_2^*] \\
&\quad + xz[-\beta_1 I_2^* S^* + Bp\beta_1 I_2^* S^* + C(1-p)\beta_1 I_2^* S^*] \\
&\quad + xu[-\beta_2 J^* S^* + Bq\beta_2 J^* S^* + C(1-q)\beta_2 J^* S^*] \\
&\quad + u[\beta_2 J^* S^* + B\xi_1 J^* + C\xi_2 J^* - Dp_1 I_2^*] \\
&\quad + y[-Bp\beta_1 I_2^* S^* - Bq\beta_2 J^* S^* - B\xi_1 J^* + C\varepsilon I_1^*] \\
&\quad + z[\beta_1 I_2^* S^* - C(1-p)\beta_1 I_2^* S^* - C(1-q)\beta_2 J^* S^* - C\varepsilon I_1^* - C\xi_2 J^* + Dp_1 I_2^*] \\
&\quad - \frac{xz}{y} (Bp\beta_1 I_2^* S^*) - \frac{xu}{y} (Bq\beta_2 J^* S^*) - \frac{u}{y} (B\xi_1 J^*) \\
&\quad - x[C(1-p)\beta_1 I_2^* S^*] - \frac{xu}{z} (C(1-q)\beta_2 J^* S^*) - \frac{y}{z} (C\varepsilon I_1^*) \\
&\quad - \frac{u}{z} (C\xi_2 J^*) - \frac{z}{u} (Dp_1 I_2^*) - \frac{1}{x} (\beta_1 I_2^* S^* + \beta_2 J^* S^*). \tag{3.10}
\end{aligned}$$

Variabel yang muncul pada persamaan (3.10) dengan koefisien positif adalah  $xz, xu, u, y$ , dan  $z$ . Jika total koefisien tersebut positif maka ada kemungkinan  $V'$  bernilai positif, sehingga koefisien  $xz, xu, u, y$ , dan  $z$  dibuat sama dengan nol, diperoleh

$$-\beta_1 I_2^* S^* + Bp\beta_1 I_2^* S^* + C(1-p)\beta_1 I_2^* S^* = 0, \tag{3.11a}$$

$$-\beta_2 J^* S^* + Bq\beta_2 J^* S^* + C(1-q)\beta_2 J^* S^* = 0, \tag{3.11b}$$

$$\beta_2 J^* S^* + B\xi_1 J^* + C\xi_2 J^* - Dp_1 I_2^* = 0, \tag{3.11c}$$

$$-Bp\beta_1 I_2^* S^* - Bq\beta_2 J^* S^* - B\xi_1 J^* + C\varepsilon I_1^* = 0, \tag{3.11d}$$

$$\beta_1 I_2^* S^* - C(1-p)\beta_1 I_2^* S^* - C(1-q)\beta_2 J^* S^* - C\varepsilon I_1^* - C\xi_2 J^* + Dp_1 I_2^* = 0. \tag{3.11e}$$

Dari persamaan (3. 11a) diperoleh

$$\begin{aligned}
\beta_1 I_2^* S^* (-1 + Bp + C(1-p)) &= 0 \\
-1 + Bp + C(1-p) &= 0. \tag{3.12a}
\end{aligned}$$

Dari persamaan (3. 11b) diperoleh

$$\begin{aligned}
\beta_2 J^* S^* (-1 + Bq + C(1-q)) &= 0, \\
-1 + Bq + C(1-q) &= 0. \tag{3.12b}
\end{aligned}$$

Dengan menggunakan  $p_1 I_2^* = b_3 J^*$  persamaan (3. 11c) menjadi

$$\begin{aligned}
\beta_2 J^* S^* + B\xi_1 J^* + C\xi_2 J^* - Db_3 J^* &= 0 \\
\beta_2 S^* + B\xi_1 + C\xi_2 - Db_3 &= 0. \tag{3.12c}
\end{aligned}$$

Dari persamaan (3.11d) diperoleh

$$\begin{aligned} B(-p\beta_1 I_2^* S^* - q\beta_2 J^* S^* - \xi_1 J^*) + C\varepsilon I_1^* &= 0 \\ B(I_1^* b_1) + C\varepsilon I_1^* &= 0 \\ Bb_1 - C\varepsilon &= 0 \end{aligned} \quad (3.12d)$$

Dari persamaan (3.11e) diperoleh

$$\begin{aligned} \beta_1 I_2^* S^* - C((1-p)\beta_1 I_2^* S^* + (1-q)\beta_2 J^* S^* + \varepsilon I_1^* + \xi_2 J^*) + Dp_1 I_2^* &= 0 \\ \beta_1 I_2^* S^* - C(b_2 I_2^*) + Dp_1 I_2^* &= 0 \\ I_2^*(\beta_1 S^* - Cb_2 + Dp_1) &= 0 \\ \beta_1 S^* - Cb_2 + Dp_1 &= 0 \end{aligned} \quad (3.12e)$$

Dari persamaan (3.12a) dan (3.12b) diketahui bahwa nilai  $p = q$ . Karena nilai  $p = q$ , mengakibatkan

$$R_0 = \frac{(\beta_1 b_3 + \beta_2 p_1)((1-p)b_1 + \varepsilon p) \frac{\Lambda}{\mu}}{(b_1 b_2 b_3 - (\varepsilon \xi_1 + \xi_2 b_1)p_1)}.$$

Dari persamaan (3.12a), (3.12b) dan (3.12d), diperoleh

$$\begin{aligned} B &= \frac{\varepsilon}{\varepsilon p + b_1(1-p)}, \\ C &= \frac{b_1}{\varepsilon p + b_1(1-p)}. \end{aligned}$$

Dari persamaan (3.12c) diperoleh nilai

$$D = \frac{\beta_2 S^*}{b_3} + \frac{\varepsilon \xi_1 + b_1 \xi_2}{b_3(\varepsilon p + b_1(1-p))}. \quad (3.13)$$

Dari persamaan (3.12e), diperoleh nilai

$$D = \frac{b_1 b_2}{p_1(\varepsilon p + b_1(1-p))} - \frac{\beta_1 S^*}{p_1}. \quad (3.14)$$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa nilai  $D$  pada persamaan (3.13) sama dengan nilai  $D$  pada persamaan (3.14), yaitu sebagai berikut

$$\left( \frac{\beta_2 S^*}{b_3} + \frac{\varepsilon \xi_1 + b_1 \xi_2}{b_3(\varepsilon p + b_1(1-p))} \right) - \left( \frac{b_1 b_2}{p_1(\varepsilon p + b_1(1-p))} - \frac{\beta_1 S^*}{p_1} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \frac{\beta_2 S^* p_1 + \beta_1 S^* b_3}{b_3 p_1} + \frac{(\varepsilon \xi_1 + b_1 \xi_2) p_1 - b_1 b_2 b_3}{b_3 p_1 (\varepsilon p + b_1 (1 - p))} \right) \\
&= \left( \frac{(\varepsilon p + b_1 (1 - p)) (\beta_2 p_1 + \beta_1 b_3) S^* + (\varepsilon \xi_1 + b_1 \xi_2) p_1 - b_1 b_2 b_3}{b_3 p_1 (\varepsilon p + b_1 (1 - p))} \right). \\
&= \left( \frac{(\varepsilon p + b_1 (1 - p)) (\beta_2 p_1 + \beta_1 b_3) \frac{\Lambda}{\mu R_0} + (\varepsilon \xi_1 + b_1 \xi_2) p_1 - b_1 b_2 b_3}{b_3 p_1 (\varepsilon p + b_1 (1 - p))} \right). \quad (3.15)
\end{aligned}$$

Diketahui bahwa angka reproduksi dasar  $R_0$  dengan  $p = q$  adalah

$$R_0 = \frac{(\beta_1 b_3 + \beta_2 p_1) ((1 - p) b_1 + \varepsilon p) \frac{\Lambda}{\mu}}{b_1 b_2 b_3 - (\varepsilon \xi_1 + \xi_2 b_1) p_1},$$

maka diperoleh

$$(\beta_1 b_3 + \beta_2 p_1) ((1 - p) b_1 + \varepsilon p) \frac{\Lambda}{\mu} = [b_1 b_2 b_3 - (\varepsilon \xi_1 + \xi_2 b_1) p_1] R_0,$$

Sehingga ruas kanan persamaan (3.15) menjadi

$$\left( \frac{\left( (b_1 b_2 b_3 - (\varepsilon \xi_1 + b_1 \xi_2) p_1) R_0 \frac{1}{R_0} \right) - (b_1 b_2 b_3 - (\varepsilon \xi_1 + b_1 \xi_2) p_1)}{b_3 p_1 (\varepsilon p + b_1 (1 - p))} \right) = 0.$$

Dengan demikian terbukti bahwa nilai  $D$  pada persamaan (3.13) sama dengan nilai  $D$  pada persamaan (3.14), sehingga persamaan (3.10) menjadi

$$\begin{aligned}
V' = & -\mu S^* \frac{(1 - x)^2}{x} + [\beta_1 I_2^* S^* + \beta_2 J^* S^* + B p \beta_1 I_2^* S^* + B q \beta_2 J^* S^* + B \xi_1 J^* \\
& + C(1 - p) \beta_1 I_2^* S^* + C(1 - q) \beta_2 J^* S^* + C \varepsilon I_1^* + C \xi_2 J^* + D p_1 I_2^*] \\
& - \frac{xz}{y} (B p \beta_1 I_2^* S^*) - \frac{xu}{y} (B q \beta_2 J^* S^*) - \frac{u}{y} (B \xi_1 J^*) \\
& - x[C(1 - p) \beta_1 I_2^* S^*] - \frac{xu}{z} (C(1 - q) \beta_2 J^* S^*) - \frac{y}{z} (C \varepsilon I_1^*) \\
& - \frac{u}{z} (C \xi_2 J^*) - \frac{z}{u} (D p_1 I_2^*) - \frac{1}{x} (\beta_1 I_2^* S^* + \beta_2 J^* S^*) \quad (3.16)
\end{aligned}$$

Substitusi nilai  $B, C$ , dan  $D$  ke dalam persamaan (3.16), diperoleh

$$\begin{aligned}
V' = & -\mu S^* \frac{(1-x)^2}{x} + \frac{b_1}{\varepsilon p + b_1(1-p)} (1-p) \beta_1 I_2^* \left(2 - x - \frac{1}{x}\right) \\
& + \frac{b_1}{\varepsilon p + b_1(1-p)} \xi_2 J^* \left(2 - \frac{u}{z} - \frac{z}{u}\right) \\
& + \frac{b_1}{\varepsilon p + b_1(1-p)} (1-q) \beta_2 J^* S^* \left(3 - \frac{1}{x} - \frac{xu}{z} - \frac{z}{u}\right) \\
& + \frac{\varepsilon}{\varepsilon p + b_1(1-p)} p \beta_1 I_2^* S^* \left(3 - \frac{1}{x} - \frac{xz}{y} - \frac{y}{z}\right) \\
& + \frac{\varepsilon}{\varepsilon p + b_1(1-p)} q \beta_2 J^* S^* \left(4 - \frac{1}{x} - \frac{y}{z} - \frac{z}{u} - \frac{xu}{y}\right) \\
& + \frac{\varepsilon}{\varepsilon p + b_1(1-p)} \xi_1 J^* \left(3 - \frac{y}{z} - \frac{z}{u} - \frac{u}{y}\right)
\end{aligned}$$

Untuk membuktikan  $V' < 0$ , digunakan Teorema 2.5

- $2 - x - \frac{1}{x} \leq 0$

**Bukti:**

$$\frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geq \sqrt{x \times \frac{1}{x}}$$

$$\frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geq 1$$

$$x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

Karena  $x + \frac{1}{x} \geq 2$  sehingga  $2 - \left(x + \frac{1}{x}\right) \leq 0$ .

- $2 - \frac{u}{z} - \frac{z}{u} \leq 0$

**Bukti:**

$$\frac{\frac{u}{z} + \frac{z}{u}}{2} \geq \sqrt{\frac{u}{z} \times \frac{z}{u}}$$

$$\frac{\frac{u}{z} + \frac{z}{u}}{2} \geq 1$$

$$\frac{u}{z} + \frac{z}{u} \geq 2.$$

Karena  $\frac{u}{z} + \frac{z}{u} \geq 2$  sehingga  $2 - \left(\frac{u}{z} + \frac{z}{u}\right) \leq 0$ .

- $3 - \frac{1}{x} - \frac{xu}{z} - \frac{z}{u} \leq 0$

**Bukti:**

$$\frac{\frac{1}{x} + \frac{xu}{z} + \frac{z}{u}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{x} \times \frac{xu}{z} \times \frac{z}{u}}$$

$$\frac{\frac{1}{x} + \frac{xu}{z} + \frac{z}{u}}{3} \geq 1$$

$$\frac{1}{x} + \frac{xu}{z} + \frac{z}{u} \geq 3,$$

Karena  $\frac{1}{x} + \frac{xu}{z} + \frac{z}{u} \geq 3$  sehingga  $3 - \left(\frac{1}{x} + \frac{xu}{z} + \frac{z}{u}\right) \leq 0$ .

- $3 - \frac{1}{x} - \frac{xz}{y} - \frac{y}{z} \leq 0$

**Bukti:**

$$\frac{\frac{1}{x} + \frac{xz}{y} + \frac{y}{z}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{1}{x} \times \frac{xz}{y} \times \frac{y}{z}}$$

$$\frac{\frac{1}{x} + \frac{xz}{y} + \frac{y}{z}}{3} \geq 1$$

$$\frac{1}{x} + \frac{xz}{y} + \frac{y}{z} \geq 3.$$

Karena  $\frac{1}{x} + \frac{xz}{y} + \frac{y}{z} \geq 3$  sehingga  $3 - \left(\frac{1}{x} + \frac{xz}{y} + \frac{y}{z}\right) \leq 0$ .

- $4 - \frac{1}{x} - \frac{y}{z} - \frac{z}{u} - \frac{xu}{y} \leq 0$

**Bukti:**

$$\frac{\frac{1}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{u} + \frac{xu}{y}}{4} \geq \sqrt[4]{\frac{1}{x} \times \frac{y}{z} \times \frac{z}{u} \times \frac{xu}{y}}$$

$$\frac{\frac{1}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{u} + \frac{xu}{y}}{4} \geq 1$$



$$\frac{1}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{u} + \frac{xu}{y} \geq 4.$$

Karena  $\frac{1}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{u} + \frac{xu}{y} \geq 4$  sehingga  $4 - \left(\frac{1}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{u} + \frac{xu}{y}\right) \leq 0$ .

- $3 - \frac{y}{z} - \frac{z}{u} - \frac{u}{y} \leq 0$

**Bukti:**

$$\frac{\frac{y}{z} + \frac{z}{u} + \frac{u}{y}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{y}{z} \times \frac{z}{u} \times \frac{u}{y}}$$

$$\frac{\frac{y}{z} + \frac{z}{u} + \frac{u}{y}}{3} \geq 1$$

$$\frac{y}{z} + \frac{z}{u} + \frac{u}{y} \geq 3.$$

Karena  $\frac{y}{z} + \frac{z}{u} + \frac{u}{y} \geq 3$  sehingga  $3 - \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{u} + \frac{u}{y}\right) \leq 0$ .

Dari uraian tersebut diketahui bahwa  $V' \leq 0$  jika  $x, y, z, u \geq 0$  dan  $V' = 0$  jika  $x = 1, y = z = u$ . Dengan demikian  $V' = 0$  diperoleh jika  $y = z = u = 1$ . Diketahui bahwa  $x = \frac{S}{S^*}, y = \frac{I_1}{I_1^*}, z = \frac{I_2}{I_2^*}, u = \frac{J}{J^*}$ , sehingga  $x = 1$  jika  $S = S^*, y = 1$  jika  $I_1 = I_1^*, z = 1$  jika  $I_2 = I_2^*$ , dan  $u = 1$  jika  $J = J^*$ . Dengan demikian  $V'(S, I_1, I_2, J) < 0, \forall \{S, I_1, I_2, J\} \neq \{S^*, I_1^*, I_2^*, J^*\}$  dengan  $\{S, I_1, I_2, J\} \in \Omega$ , sehingga  $V$  memenuhi Definisi 2.6.2. Oleh karena itu, berdasarkan Teorema 2.4,  $E^*$  bersifat stabil asimtotik global. Berdasarkan uraian tersebut, kestabilan global titik kesetimbangan endemi  $E^*$  dapat dinyatakan dalam Teorema 3.3 berikut.

### **Teorema 3.3**

Jika  $p = q$  dan  $R_0 > 1$ , maka titik kesetimbangan endemi  $E^*$  stabil asimtotik global.

Kestabilan titik kesetimbangan endemi  $E^*$  untuk  $p \neq q$  akan ditunjukkan dengan simulasi numerik.

### 3.6 Simulasi Numerik

Pada subbab ini disajikan simulasi numerik model epidemi HIV/AIDS dengan dua tahap laten dan pengobatan. Simulasi dilakukan menggunakan *software* Matlab dengan metode Runga Kutta orde empat.

#### 3.6.1 Kestabilan titik kesetimbangan $R_0 < 1$

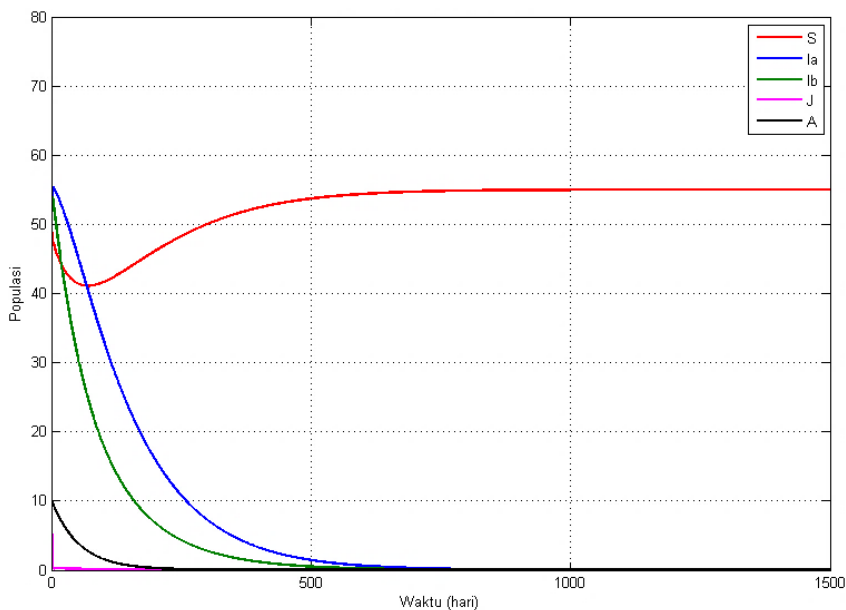
Tabel 3.1 Nilai parameter simulasi I

Parameter	Nilai
$\Lambda$	$0,55 \text{ year}^{-1}$
$\beta_1$	$0,0001 \text{ year}^{-1}$
$\beta_2$	$0,006 \text{ year}^{-1}$
$p_1$	$0,01 \text{ year}^{-1}$
$p_2$	$0,03 \text{ year}^{-1}$
$\varepsilon$	$0,002 \text{ year}^{-1}$
$\alpha$	$0,01 \text{ year}^{-1}$
$\mu$	$0,01 \text{ year}^{-1}$
$p$	0,9
$q$	0,8
$\xi_1$	0,8
$\xi_2$	0,9

Pada simulasi I digunakan nilai parameter seperti pada Tabel 3.1, sehingga diperoleh

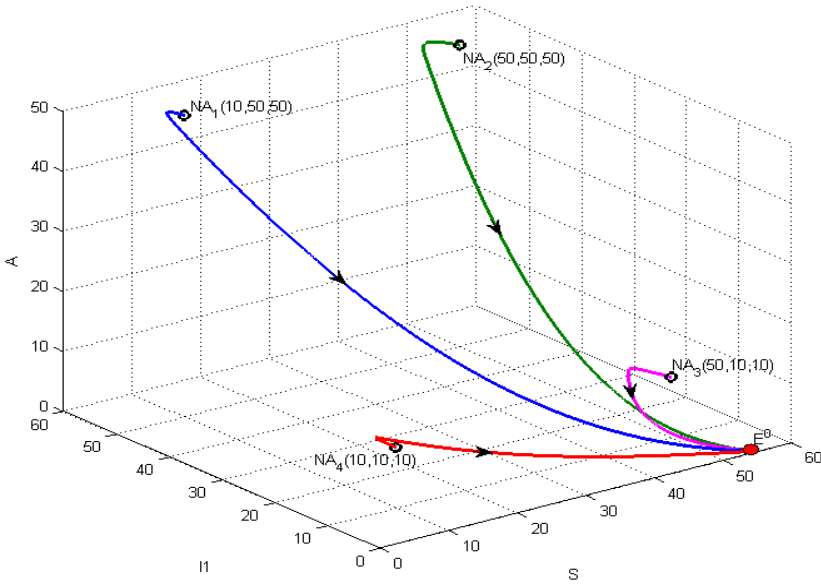
$$R_0 = 0.1427 < 1.$$

Berdasarkan syarat eksistensi untuk  $R_0 < 1$  hanya terdapat satu titik kesetimbangan yang eksis, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit. Pada Gambar 3.1, dapat diketahui bahwa kurva solusi  $S(t), I_1(t), I_2(t), J(t)$  dan  $A(t)$  dengan nilai awal  $(50,50,50,10,10)$  akan menuju titik kesetimbangan  $E_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0,0,0,0\right) = (55,0,0,0,0)$ . Dengan kata lain, titik  $E_0 = (55,0,0,0,0)$  bersifat stabil dan pada kondisi nyata dapat dikatakan bahwa tidak terjadi penyebaran penyakit pada populasi tersebut.



**Gambar 3.1** Kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit ( $E^0$ ) ketika  $R_0 = 0,1427 < 1$

Untuk menganalisis perilaku solusi titik kesetimbangan bebas penyakit ( $E^0$ ) dari beberapa nilai awal digunakan potret fase. Berdasarkan Gambar 3.1, diketahui bahwa kurva solusi  $I_1(t)$  dan  $I_2(t)$ ,  $J(t)$  dan  $A(t)$  memiliki perilaku yang sama, sehingga dapat dipilih salah satunya. Potret fase  $S(t), I_1(t), A(t)$  untuk  $R_0 < 1$  juga menunjukkan kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit ( $E^0$ ). Pada Gambar 3.2, terlihat bahwa dengan nilai awal  $S(t), I_1(t), A(t)$  yang berbeda-beda grafik solusi menuju titik kesetimbangan bebas penyakit  $E^0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0\right) = (55, 0, 0)$ . Berdasarkan Gambar 3.2 dapat dilihat juga bahwa untuk nilai awal yang jauh maupun dekat dengan titik kesetimbangan bebas penyakit  $E^0$ , solusi dari sistem juga menuju titik kesetimbangan bebas penyakit  $E^0$ . Dengan demikian, berdasarkan hasil simulasi numerik titik kesetimbangan bebas penyakit  $E^0$  bersifat stabil asimtotik global.



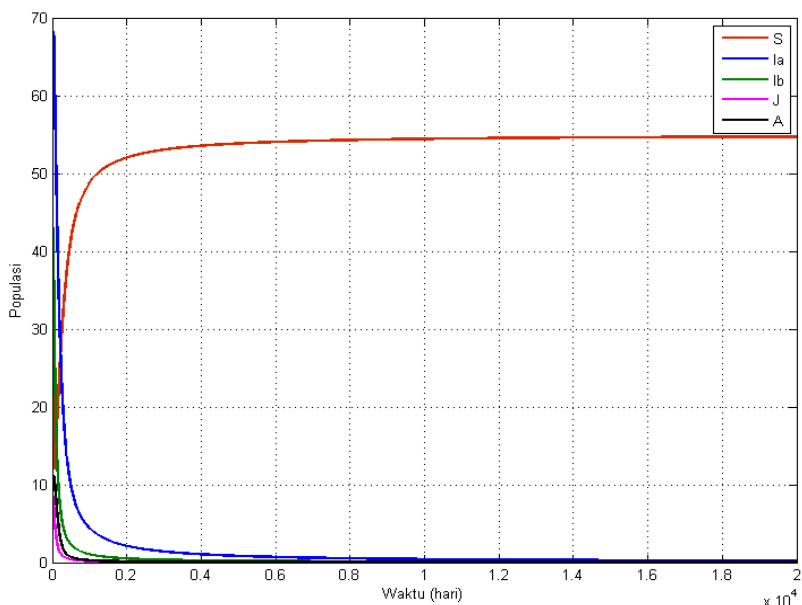
**Gambar 3.2** Potret fase titik kesetimbangan bebas penyakit ( $E^0$ ) ketika  $R_0 = 0,1427 < 1$

### 3.6.2 Kestabilan titik kesetimbangan untuk $R_0 = 1$

Pada simulasi II digunakan nilai parameter seperti pada Tabel 3.1 dengan perubahan pada nilai  $\xi_1$  dan  $\xi_2$ , yaitu  $\xi_1 = 0.02$  dan  $\xi_2 = 0.00184$ , sehingga diperoleh

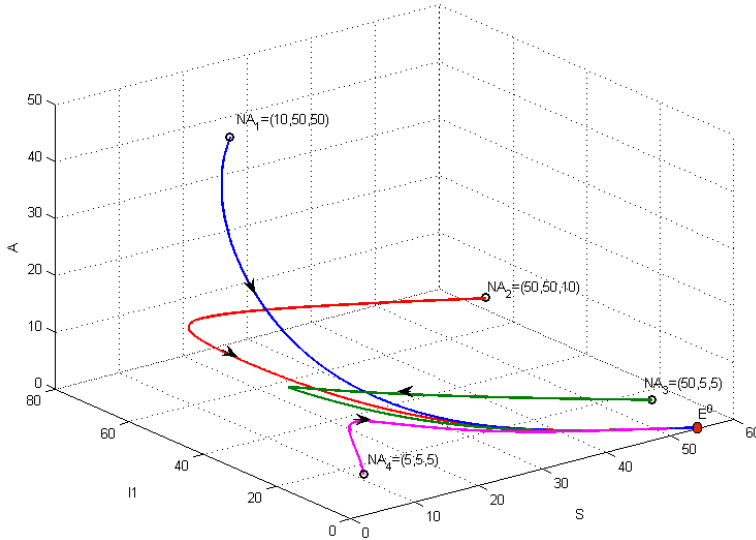
$$R_0 = 1.$$

Berdasarkan syarat eksistensi untuk  $R_0 = 1$  terdapat satu titik kesetimbangan yang eksis, yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit. Pada Gambar 3.3, dapat diketahui bahwa kurva solusi  $S(t), I_1(t), I_2(t), J(t)$  dan  $A(t)$  dengan nilai awal  $(50, 50, 50, 10, 10)$  akan menuju titik kesetimbangan  $E_0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0, 0\right) = (55, 0, 0, 0, 0)$ .



**Gambar 3.3** Kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit ( $E^0$ ) ketika  $R_0 = 1$

Untuk menganalisis perilaku solusi titik kesetimbangan bebas penyakit  $E^0$  ketika  $R_0 = 1$  dari beberapa nilai awal digunakan potret fase. Potret fase  $S(t), I_1(t), A(t)$  untuk  $R_0 = 1$  juga menunjukkan kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit ( $E^0$ ). Pada Gambar 3.4, terlihat bahwa dengan nilai awal  $S(t), I_1(t), A(t)$  yang berbeda-beda grafik solusi menuju titik kesetimbangan bebas penyakit  $E^0 = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0\right) = (55, 0, 0)$ . Berdasarkan Gambar 3.4 dapat dilihat juga bahwa untuk nilai awal yang jauh maupun dekat dengan titik kesetimbangan bebas penyakit  $E^0$ , solusi dari sistem juga menuju titik kesetimbangan bebas penyakit  $E^0$ . Dengan demikian, berdasarkan hasil simulasi numerik titik kesetimbangan bebas penyakit  $E^0$  bersifat stabil asimtotik global untuk  $R_0 = 1$ .



**Gambar 3.4** Potret fase titik kesetimbangan bebas penyakit ( $E^0$ ) ketika  $R_0 = 1$

### 3.6.3 Kestabilan titik kesetimbangan untuk $R_0 > 1$

#### a. kestabilan titik kesetimbangan $R_0 > 1$ dengan $p = q$

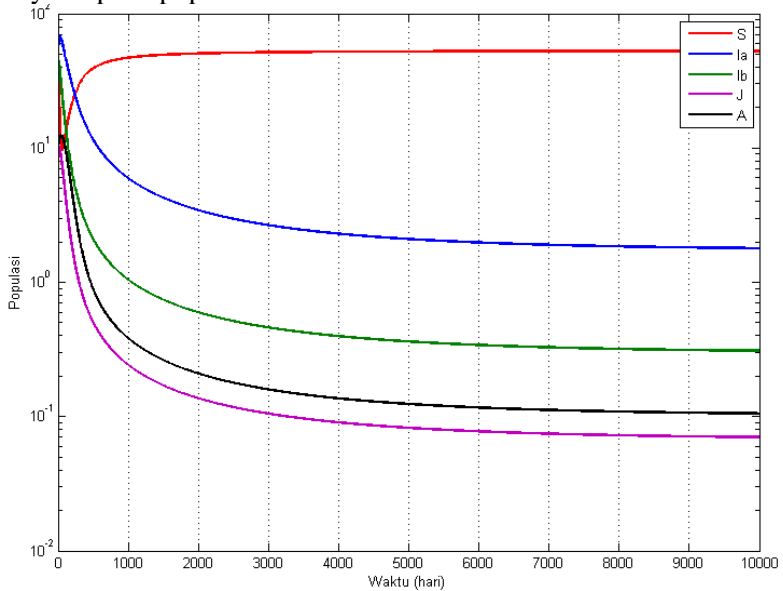
Pada simulasi III digunakan nilai parameter seperti pada Tabel 3.1 dengan perubahan pada nilai  $\xi_1$ ,  $\xi_2$ ,  $p$ , dan  $q$  yaitu  $\xi_1 = 0.01$ ,  $\xi_2 = 0.03$ , dan  $p = q = 0.9$ , sehingga diperoleh

$$R_0 = 1.0438 > 1.$$

$p = q$  menyatakan bahwa proporsi individu rentan yang terinfeksi oleh individu *fast* laten dan memasuki subpopulasi *slow* laten sama dengan proporsi individu rentan yang terinfeksi oleh individu simtomatik dan memasuki subpopulasi *slow* laten. Berdasarkan Teorema 3.3, ketika  $p = q$  dan  $R_0 > 1$ , titik kesetimbangan endemi  $E^*$  stabil asimtotik global. Kestabilan titik kesetimbangan endemi  $E^*$  dengan nilai  $p = q$  dapat dilihat pada Gambar 3.5.

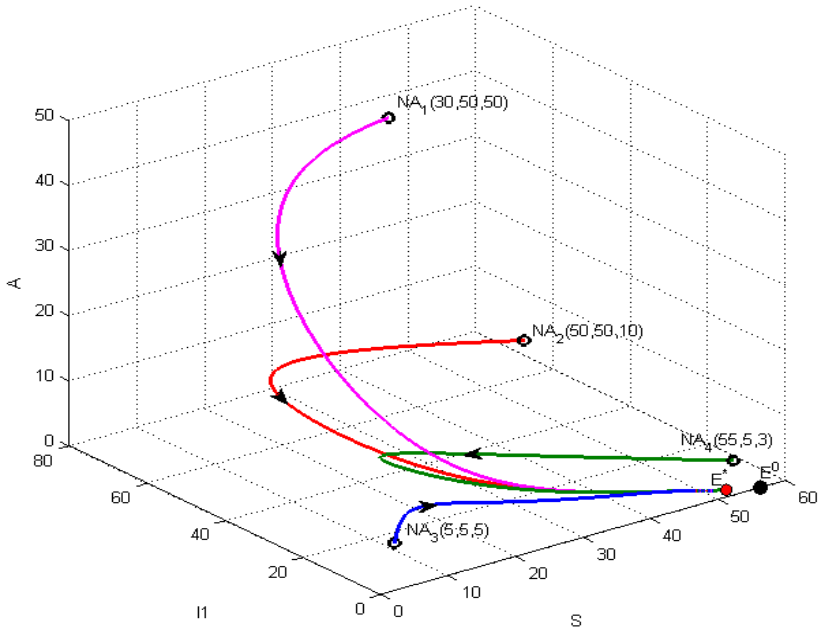
Diketahui bahwa kurva solusi  $S(t)$ ,  $I_1(t)$ ,  $I_2(t)$ ,  $J(t)$  dan  $A(t)$  dengan nilai awal  $(50, 50, 50, 10, 10)$  menuju titik kesetimbangan  $E^*(52.6915, 1.7370, 0.2993, 0.0680, 0.1029)$ . Dengan kata lain, titik  $E^*(52.6915, 1.7370, 0.2993, 0.0680, 0.1029)$  bersifat stabil

dan pada kondisi nyata dapat dikatakan bahwa terjadi penyebaran penyakit pada populasi tersebut.



**Gambar 3.5** Kestabilan titik kesetimbangan endemi ( $E^*$ ) ketika  $R_0 = 1,0438 > 1$  untuk  $p = q$

Sama halnya dengan analisis kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit, digunakan juga potret fase  $S(t), I_1(t), A(t)$  untuk menganalisis perilaku solusi titik kesetimbangan endemi ( $E^*$ ) untuk  $p = q$  dari beberapa nilai awal. Berdasarkan Gambar 3.6, diketahui bahwa potret fase  $S(t), I_1(t), A(t)$  juga menunjukkan kestabilan titik kesetimbangan endemi ( $E^*$ ). Diketahui bahwa dengan nilai awal  $S(t), I_1(t), A(t)$  yang berbeda-beda grafik solusi menuju titik kesetimbangan endemi  $E^*(52.6915, 1.7370, 0.1029)$ . Pada Gambar 3.6, dapat dilihat juga bahwa untuk nilai awal yang jauh maupun dekat dengan titik kesetimbangan endemi  $E^*$ , solusi dari sistem juga menuju titik kesetimbangan endemi  $E^*$ . Dengan demikian, berdasarkan hasil simulasi numerik titik kesetimbangan endemi  $E^*$  bersifat stabil asimtotik global jika  $R_0 > 1$  dengan  $p = q$ .



**Gambar 3.6** Potret fase titik kesetimbangan endemi ( $E^*$ ) ketika  $R_0 = 1,0438 > 1$  untuk  $p = q$

**b. kestabilan titik kesetimbangan  $R_0 > 1$  dengan  $p \neq q$**

Pada simulasi IV digunakan nilai parameter seperti pada Tabel 3.1 dengan perubahan pada nilai  $\xi_1$ , dan  $\xi_2$  yaitu  $\xi_1 = 0.01$ , dan  $\xi_2 = 0.03$ , sehingga diperoleh

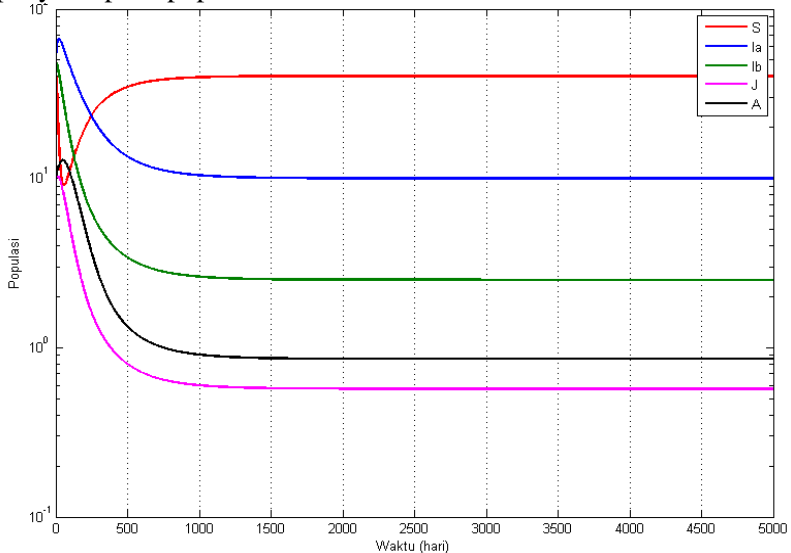
$$R_0 = 1.3680 > 1.$$

$p \neq q$  menyatakan bahwa proporsi individu rentan yang terinfeksi oleh individu *fast* laten dan memasuki subpopulasi *slow* laten tidak sama dengan proporsi individu rentan yang terinfeksi oleh individu simtomatik dan memasuki subpopulasi *slow* laten. Simulasi numerik menunjukkan bahwa jika  $p \neq q$  dan  $R_0 > 1$ , maka titik kesetimbangan endemi  $E^*$  juga stabil asimtotik global.

Kestabilan titik kesetimbangan endemi  $E^*$  dengan nilai  $p > q$  dapat dilihat pada Gambar 3.7. Diketahui bahwa kurva solusi  $S(t), I_1(t), I_2(t), J(t)$  dan  $A(t)$  dengan nilai awal  $(50, 50, 50, 10, 10)$

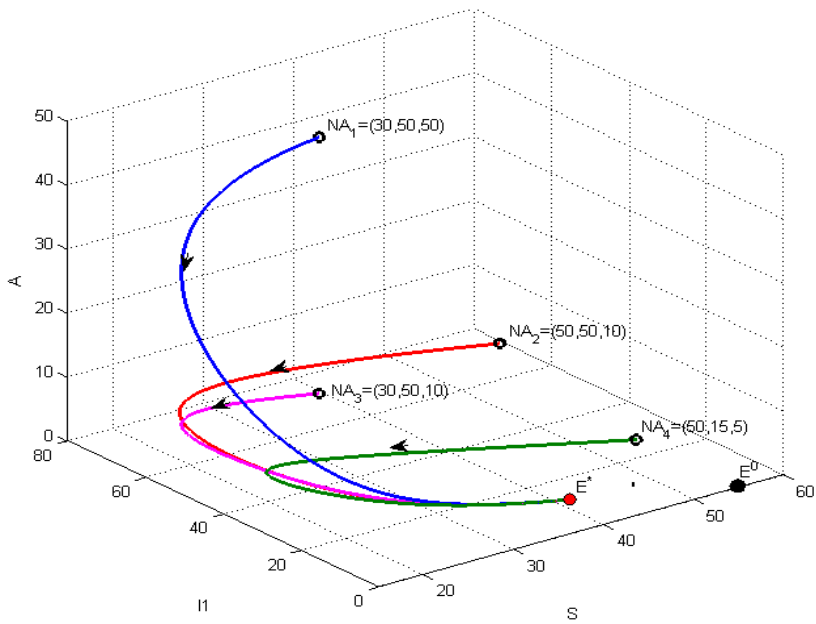


menuju titik kesetimbangan  $E^*(40.2054, 9.9949, 2.5141, 0.5714, 0.8571)$ . Dengan kata lain, titik  $E^*(40.2054, 9.9949, 2.5141, 0.5714, 0.8571)$  bersifat stabil dan pada kondisi nyata dapat dikatakan bahwa terjadi penyebaran penyakit pada populasi tersebut.



**Gambar 3.7** Kestabilan titik kesetimbangan endemi ( $E^*$ ) ketika  $R_0 = 1,3680 > 1$  untuk  $p \neq q$

Sama halnya dengan analisis kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit, digunakan juga potret fase  $S(t), I_1(t), A(t)$  untuk menganalisis perilaku solusi titik kesetimbangan endemi ( $E^*$ ) untuk  $p \neq q$  dari beberapa nilai awal. Berdasarkan Gambar 3.8, diketahui bahwa potret fase  $S(t), I_1(t), A(t)$  juga menunjukkan kestabilan titik kesetimbangan endemi ( $E^*$ ). Diketahui bahwa dengan nilai awal  $S(t), I_1(t), A(t)$  yang berbeda-beda grafik solusi menuju titik kesetimbangan endemi  $E^*(40.2054, 9.9949, 0.8571)$ . Pada Gambar 3.8, dapat dilihat bahwa untuk nilai awal yang jauh maupun dekat dengan titik kesetimbangan endemi  $E^*$ , solusi dari sistem juga menuju titik kesetimbangan endemi  $E^*$ . Dengan demikian, berdasarkan hasil simulasi numerik titik kesetimbangan endemi  $E^*$  bersifat stabil asimtotik global untuk  $R_0 > 1$  dengan  $p \neq q$ .



**Gambar 3.8** Potret fase titik kesetimbangan endemi ( $E^*$ ) ketika  $R_0 = 1,3680 > 1$  untuk  $p \neq q$

## **BAB IV**

### **KESIMPULAN DAN SARAN**

#### **4.1 Kesimpulan**

Berdasarkan tujuan penulisan dan hasil yang telah diperoleh, dapat diambil kesimpulan sebagai berikut.

1. Model epidemi HIV/AIDS dengan dua tahap laten dan pengobatan mempunyai dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit  $E^0 = (S, I_1, I_2, J, A)$  dan titik kesetimbangan endemi  $E^* = (S^*, I_1^*, I_2^*, J^*, A^*)$ . Eksistensi titik kesetimbangan endemi ditentukan oleh angka reproduksi dasar  $R_0$ , yaitu stabil ketika  $R_0 > 1$ , sedangkan titik kesetimbangan bebas penyakit selalu eksis.
2. Analisis kestabilan menunjukkan bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotik global jika  $R_0 < 1$ , sedangkan jika  $R_0 > 1$  titik kesetimbangan endemi stabil asimtotik global.
3. Hasil simulasi menunjukkan bahwa perhitungan secara analisis sesuai dengan numerik.

#### **4.2 Saran**

Pada skripsi ini, laju infeksi pada model epidemi HIV/AIDS dengan dua tahap laten dan pengobatan adalah bilinear. Untuk penelitian selanjutnya, disarankan laju infeksi tersaturasi digunakan pada kontak antara individu rentan dengan individu simptomatik.



## DAFTAR PUSTAKA

- Alligood, K. T., T. D. Sauer, dan J. A. Yorke. 2000. *CHAOS: An Introduction to Dynamical Systems*. Springer-Verlag. New York.
- Blower, S. 2001. Calculating the consequences: HAART and risky sex. *Biomathematics*. Vol 15. Hal 1309-1310.
- Boyce, W.E. dan R.C. DiPrima. 2009. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*. Ninth Edition. John Wiley & Sons Inc. New York.
- Cai, L.M., X. Li., M. Ghosh., dan B. Guo. 2009. Stability of an HIV/AIDS epidemic model with treatment. *Computational and Applied Mathematics*. Vol 229. Hal 313-323.
- Driessche, P.V.D. dan J. Watmough. 2002. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission. *Mathematical Bioscience*. Vol 180. Hal 29-48.
- Finizio, N. dan G. Ladas. 1982. *An Introduction to Differential Equations with Difference Equation, Fourier series, and Partial Differential Equations*. Wadsworth Publishing Company. Belmounth California.
- Heferman, J.M, R.J Smith, dan L.M. Wahl. 2005. Perspectives on the basic reproduction ratio. *The Royal Society Interface*. Vol 2. Hal 281-293.
- Huo, H dan L. Feng. 2013. Global stability for an HIV/AIDS epidemic model with different latent stages and treatment. *Applied Mathematical Modelling*. Vol 37. Hal 1480-1489.
- May, R.M. dan R.M. Anderson. 1987. Transmission dynamics of HIV infection. *Nature*. Vol 326. Hal 137-142.
- Murray, J.D., 2002. *Mathematical Biology I. An Introduction*. Third edition. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg.

- Nyabadza, F dan Z. Mukandavire. 2011. Modelling the HIV/AIDS epidemic trends in South Africa: Insights from a simple mathematical model. *Nonlinear Analysis*. Vol 12. Hal 2091-2104.
- Peter, M. 2014. *More Calculus of a Single Variable*. Springer-Verlag. New York.

## LAMPIRAN

### Lampiran 1. Penentuan titik kesetimbangan

Titik kesetimbangan sistem persamaan (2.21) diperoleh ketika  $\frac{dS}{dt} = \frac{dI_1}{dt} = \frac{dI_2}{dt} = \frac{dJ}{dt} = \frac{dA}{dt} = 0$ , yaitu

$$\Lambda - (\beta_1 I_2 S + \beta_2 J S) - \mu S = 0, \quad (L.1a)$$

$$p\beta_1 I_2 S + q\beta_2 J S + \xi_1 J - b_1 I_1 = 0, \quad (L.1b)$$

$$(1-p)\beta_1 I_2 S + (1-q)\beta_2 J S + \varepsilon I_1 + \xi_2 J - b_2 I_2 = 0, \quad (L.1c)$$

$$p_1 I_2 - b_3 J = 0, \quad (L.1d)$$

$$p_2 J - b_4 A = 0. \quad (L.1e)$$

Dari persamaan (L.1d) diperoleh

$$J = \frac{p_1}{b_3} I_2,$$

misalkan  $M = \frac{p_1}{b_3}$ , maka

$$J = M I_2. \quad (L.2)$$

Dari persamaan (L.1e) diperoleh

$$A = \frac{p_2 J}{b_4}. \quad (L. 3)$$

Dari persamaan (L.1a) diperoleh

$$S = \frac{\Lambda}{(\beta_1 I_2 + \beta_2 J + \mu)}. \quad (L. 4)$$

Misalkan  $R = (\beta_1 I_2 + \beta_2 J + \mu)$ , maka

$$S = \frac{\Lambda}{R}. \quad (L. 5)$$

Substitusikan persamaan (L.2) dan (L.5) ke persamaan (L.1b), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} p\beta_1 I_2 \frac{\Lambda}{R} + q\beta_2 M I_2 \frac{\Lambda}{R} + \xi_1 M I_2 - b_1 I_1 &= 0 \\ p\beta_1 I_2 \Lambda + q\beta_2 M I_2 \Lambda + \xi_1 M I_2 R - b_1 I_1 R &= 0 \\ (p\beta_1 \Lambda + q\beta_2 M \Lambda) I_2 + \xi_1 M I_2 R - b_1 I_1 R &= 0. \end{aligned} \quad (L. 6)$$

Dari persamaan (L.6) diperoleh

$$I_1 = \frac{(p\beta_1 \Lambda + q\beta_2 M \Lambda) I_2 + \xi_1 M I_2 R}{b_1 R}.$$



Misalkan  $D = p\beta_1\Lambda + q\beta_2M\Lambda$ , maka

$$I_1 = \frac{DI_2 + \xi_1MI_2R}{b_1R}. \quad (L. 7)$$

Substitusikan persamaan (L.2), (L.5), dan (L.7) ke persamaan (L.1c), diperoleh

$$(1-p)\beta_1I_2\Lambda b_1 + (1-q)\beta_2MI_2\Lambda b_1 + \varepsilon DI_2 + \varepsilon\xi_1MI_2R + \xi_2MI_2Rb_1 - b_2I_2Rb_1 = 0 \quad (L. 8)$$

Substitusikan nilai  $R$  ke dalam persamaan (L.8), diperoleh

$$(1-p)\beta_1I_2\Lambda + (1-q)\beta_2MI_2\Lambda + \varepsilon DI_2 + \varepsilon\xi_1MI_2(\beta_1I_2 + \beta_2J + \mu) + \xi_2MI_2(\beta_1I_2 + \beta_2J + \mu) - b_2I_2(\beta_1I_2 + \beta_2J + \mu) = 0 \quad (L. 9)$$

Substitusikan persamaan (L.2) ke persamaan (L.9), diperoleh

$$(1-p)\beta_1I_2\Lambda b_1 + (1-q)\beta_2MI_2\Lambda b_1 + \varepsilon DI_2 + \varepsilon\xi_1M\beta_1I_2^2 + \varepsilon\xi_1M^2I_2^2\beta_2 + \varepsilon\xi_1MI_2\mu + \xi_2M\beta_1I_2^2b_1 + \xi_2M^2I_2^2\beta_2b_1 + \xi_2MI_2\mu b_1 - b_1b_2\beta_1I_2^2 - b_1b_2MI_2^2\beta_2 - b_1b_2I_2\mu = 0$$

$$I_2[(1-p)\beta_1\Lambda b_1 + (1-q)\beta_2M\Lambda b_1 + \varepsilon D + \varepsilon\xi_1M\mu + \xi_2M\mu b_1 - b_1b_2\mu] + I_2(\varepsilon\xi_1M\beta_1 + \varepsilon\xi_1M^2\beta_2 + \xi_2M\beta_1b_1 + \xi_2M^2\beta_2b_1 - b_1b_2\beta_1 - b_1b_2M\beta_2) = 0. \quad (L. 10)$$

Dari persamaan (L.10) diperoleh dua kemungkinan nilai  $I_2$ , yaitu

$$I_2 = 0 \text{ atau } I_2 = \frac{-((1-p)\beta_1\Lambda b_1 + (1-q)\beta_2M\Lambda b_1 + \varepsilon D + \varepsilon\xi_1M\mu + \xi_2M\mu b_1 - b_1b_2\mu)}{\varepsilon\xi_1M\beta_1 + \varepsilon\xi_1M^2\beta_2 + \xi_2M\beta_1b_1 + \xi_2M^2\beta_2b_1 - b_1b_2\beta_1 - b_1b_2M\beta_2}.$$

Jika  $I_2 = 0$  maka diperoleh  $J = 0$ ,  $A = 0$ ,  $I_1 = 0$ , sehingga persamaan (L.4) menghasilkan  $S = \frac{\Lambda}{\mu}$ . Berdasarkan uraian tersebut diperoleh

$$E^0 = (S^0, I_1^0, I_2^0, J^0, A^0) = \left(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0, 0, 0\right).$$

Kondisi  $I_2 = 0$  mempresentasikan tidak adanya individu yang terinfeksi.

Titik kesetimbangan endemi diperoleh ketika  $I_2 \neq 0$ , yaitu

$$I_2^* = \frac{-((1-p)\beta_1\Lambda b_1 + (1-q)\beta_2M\Lambda b_1 + \varepsilon D + \varepsilon\xi_1M\mu + \xi_2M\mu b_1 - b_1b_2\mu)}{\varepsilon\xi_1M\beta_1 + \varepsilon\xi_1M^2\beta_2 + \xi_2M\beta_1b_1 + \xi_2M^2\beta_2b_1 - b_1b_2\beta_1 - b_1b_2M\beta_2}$$

$$I_2^* = \frac{-M\left((1-p)\beta_1\Lambda b_1 + \varepsilon D - b_1b_2\mu\right)\frac{1}{M} + (1-q)\beta_2\Lambda b_1 + \varepsilon\xi_1\mu + \xi_2\mu b_1}{M(\varepsilon\xi_1\beta_1 + \varepsilon\xi_1M\beta_2 + \xi_2\beta_1b_1 + \xi_2M\beta_2b_1 - b_1b_2\beta_1\frac{1}{M} - b_1b_2\beta_2)}$$

Substitusikan nilai  $M = \frac{p_1}{b_3}$  dan  $D = p\beta_1\Lambda + q\beta_2M\Lambda$  ke dalam  $I_2^*$ , diperoleh

$$\begin{aligned}
I_2^* &= \frac{-\left(\left((1-p)\beta_1\Lambda b_1 + \varepsilon\left(p\beta_1\Lambda + q\beta_2\Lambda\frac{p_1}{b_3}\right) - b_1b_2\mu\right)\frac{b_3}{p_1} + (1-q)\beta_2\Lambda b_1 + \varepsilon\xi_1\mu + \xi_2\mu b_1\right)}{\left(\varepsilon\xi_1\beta_1 + \varepsilon\xi_1\beta_2\frac{p_1}{b_3} + \xi_2\beta_1b_1 + \xi_2\beta_2b_1\frac{p_1}{b_3} - b_1b_2\beta_1\frac{b_3}{p_1} - b_1b_2\beta_2\right)} \\
&\quad \frac{\left((1-p)\beta_1\Lambda b_1b_3^2 + \varepsilon p\beta_1\Lambda b_3^2 + \varepsilon q\beta_2\Lambda p_1b_3 - b_1b_2\mu b_3^2 + (1-q)\beta_2\Lambda b_1p_1b_3 + \varepsilon\xi_1\mu p_1b_3 + \xi_2\mu b_1p_1b_3\right)}{p_1b_3} \\
I_2^* &= -\frac{p_1b_3}{\frac{(\varepsilon\xi_1\beta_1p_1b_3 + \varepsilon\xi_1\beta_2p_1^2 + \xi_2\beta_1b_1p_1b_3 + \xi_2\beta_2b_1p_1^2 - b_1b_2\beta_1b_3^2 - b_1b_2\beta_2p_1b_3)}{p_1b_3}} \\
I_2^* &= -\frac{b_3((1-p)\beta_1\Lambda b_1b_3 + \varepsilon p\beta_1\Lambda b_3 + \varepsilon q\beta_2\Lambda p_1 - b_1b_2\mu b_3 + (1-q)\beta_2\Lambda b_1p_1 + \varepsilon\xi_1\mu p_1 + \xi_2\mu b_1p_1)}{(\varepsilon\xi_1\beta_1p_1b_3 + \varepsilon\xi_1\beta_2p_1^2 + \xi_2\beta_1b_1p_1b_3 + \xi_2\beta_2b_1p_1^2 - b_1b_2\beta_1b_3^2 - b_1b_2\beta_2p_1b_3)} \\
I_2^* &= -b_3\frac{\beta_1b_3\Lambda((1-p)b_1 + \varepsilon p)\beta_2p_1\Lambda(\varepsilon q + (1-q)b_1) + \mu(-b_1b_2b_3 + \varepsilon\xi_1p_1 + \xi_2b_1p_1)}{\beta_1b_3(\varepsilon\xi_1p_1 + \xi_2b_1p_1 - b_1b_2b_3) + \beta_2p_1(\varepsilon\xi_1p_1 + \xi_2b_1p_1 - b_1b_2b_3)}. \tag{L. 11}
\end{aligned}$$

Dari persamaan (L.2) dengan nilai  $M = \frac{p_1}{b_3}$ , diperoleh

$$J^* = \frac{p_1 I_2^*}{b_3}. \tag{L. 12}$$

Dari persamaan (L.12) diketahui bahwa

$$I_2^* = \frac{b_3}{p_1} J^*. \quad (L. 13)$$

Dari persamaan (L.1e) diperoleh

$$A^* = \frac{p_2}{b_4} J^* \quad (L. 14)$$

Substitusikan persamaan (L.13) ke dalam persamaan (L.4), sehingga diperoleh

$$S^* = \frac{\Lambda}{\beta_1 \frac{b_3}{p_1} J^* + \beta_2 J^* + \mu} \quad (L. 15)$$

Dari persamaan (L.1b) diperoleh

$$I_1 = \frac{p\beta_1 I_2 S + q\beta_2 J S + \xi_1 J}{b_1} \quad (L. 16)$$

Substitusikan persamaan (L.13) dan (L.15) ke dalam persamaan (L.16), sehingga

$$I_1^* = \frac{p\beta_1 \frac{b_3}{p_1} J^* \frac{\Lambda}{\beta_1 \frac{b_3}{p_1} J^* + \beta_2 J^* + \mu} + q\beta_2 J^* \frac{\Lambda}{\beta_1 \frac{b_3}{p_1} J^* + \beta_2 J^* + \mu} + \xi_1 J^*}{b_1}$$

$$I_1^* = \frac{p\beta_1 \frac{b_3}{p_1} J^* \frac{\Lambda p_1}{\beta_1 b_3 J^* + \beta_2 J^* p_1 + \mu p_1} + q\beta_2 J^* \frac{\Lambda p_1}{\beta_1 b_3 J^* + \beta_2 J^* p_1 + \mu p_1} + \xi_1 J^*}{b_1}$$

$$I_1^* = \frac{1}{b_1} \left( p\beta_1 b_3 J^* \frac{\Lambda}{\beta_1 b_3 J^* + \beta_2 J^* p_1 + \mu p_1} + q\beta_2 J^* \frac{\Lambda p_1}{\beta_1 b_3 J^* + \beta_2 J^* p_1 + \mu p_1} + \xi_1 J^* \right)$$

$$I_1^* = \frac{1}{b_1} \left( p\beta_1 b_3 \frac{\Lambda}{\beta_1 b_3 J^* + \beta_2 J^* p_1 + \mu p_1} + q\beta_2 \frac{\Lambda p_1}{\beta_1 b_3 J^* + \beta_2 J^* p_1 + \mu p_1} + \xi_1 \right) J^*.$$

Sehingga didapatkan satu lagi titik kesetimbangan yaitu  $E^* = (S^*, I_1^*, I_2^*, J^*, A^*)$ .



**Lampiran 2:** Penentuan nilai eigen matriks  $FV^{-1}$

$$FV^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & p\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} & q\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} & (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_2b_3b_4 - b_4p_1\xi_2 & b_4p_1\xi_1 & b_2b_4\xi_1 & 0 \\ \varepsilon b_3b_4 & b_1b_3b_4 & b_1b_4\xi_2 + b_4\varepsilon\xi_1 & 0 \\ \varepsilon p_1b_4 & b_1p_1b_4 & b_1b_2b_4 & 0 \\ \varepsilon p_1p_2 & b_1p_1p_2 & p_2b_1b_2 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{L}$$

$$FV^{-1} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} p\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} \varepsilon b_3b_4 + q\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} \varepsilon p_1b_4 & p\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1b_3b_4 + q\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} b_1p_1b_4 & p\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} (b_1b_4\xi_2 + b_4\varepsilon\xi_1) + q\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} b_1b_2b_4 & 0 \\ (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} \varepsilon b_3b_4 + (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} \varepsilon p_1b_4 & (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1b_3b_4 + (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} b_1p_1b_4 & (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} (b_1b_4\xi_2 + b_4\varepsilon\xi_1) + (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} b_1b_2b_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dicari nilai eigen dari matrik  $FV^{-1}$ , sebagai berikut

$$|FV^{-1} - \lambda I| = 0$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{p\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} \varepsilon b_3 b_4 + q\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} \varepsilon p_1 b_4}{L} - \lambda & \frac{p\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 b_3 b_4 + q\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 p_1 b_4}{L} & \frac{p\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} (b_1 b_4 \xi_2 + b_4 \varepsilon \xi_1) + q\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 b_2 b_4}{L} & 0 \\ \frac{(1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} \varepsilon b_3 b_4 + (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} \varepsilon p_1 b_4}{L} & \frac{(1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 b_3 b_4 + (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 p_1 b_4}{L} & \frac{(1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} (b_1 b_4 \xi_2 + b_4 \varepsilon \xi_1) + (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 b_2 b_4}{L} & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 \begin{vmatrix} p\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} \varepsilon b_3 b_4 + q\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} \varepsilon p_1 b_4 - \lambda L & p\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} (b_1 b_4 \xi_2 + b_4 \varepsilon \xi_1) + q\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 b_2 b_4 \\ (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} \varepsilon b_3 b_4 + (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} \varepsilon p_1 b_4 & (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 b_3 b_4 + (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 p_1 b_4 - \lambda L \end{vmatrix} = 0$$



$$\begin{aligned}
&= \lambda^2 \left[ p\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} \varepsilon b_3 b_4 \left( (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 b_3 b_4 + (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 p_1 b_4 - \lambda L \right) \right. \\
&\quad + q\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} \varepsilon p_1 b_4 \left( (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 b_3 b_4 + (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 p_1 b_4 - \lambda L \right) \\
&\quad - \lambda L \left( (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 b_3 b_4 + (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 p_1 b_4 - \lambda L \right) - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} \varepsilon b_3 b_4 \left( p\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 b_3 b_4 + q\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 p_1 b_4 \right) \\
&\quad \left. + (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} \varepsilon p_1 b_4 \left( p\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 b_3 b_4 + q\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 p_1 b_4 \right) \right] = 0 \\
&= \lambda^2 \left[ \left( p\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} \varepsilon b_3 b_4 (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 b_3 b_4 + p\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} \varepsilon b_3 b_4 (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 p_1 b_4 - p\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} \varepsilon b_3 b_4 \lambda L \right) \right. \\
&\quad + \left( q\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} \varepsilon p_1 b_4 (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 b_3 b_4 + q\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} \varepsilon p_1 b_4 (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 p_1 b_4 - q\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} \varepsilon p_1 b_4 \lambda L \right) \\
&\quad - \left( \lambda L (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 b_3 b_4 + \lambda L (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 p_1 b_4 - \lambda^2 L^2 \right) \\
&\quad - \left( (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} \varepsilon b_3 b_4 p\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 b_3 b_4 + (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} \varepsilon b_3 b_4 q\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 p_1 b_4 \right) \\
&\quad \left. + \left( (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} \varepsilon p_1 b_4 p\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 b_3 b_4 + (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} \varepsilon p_1 b_4 q\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 p_1 b_4 \right) \right] = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda^2 \left[ -p\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} \varepsilon b_3 b_4 \lambda L - q\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} \varepsilon p_1 b_4 \lambda L - \left( \lambda L(1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 b_3 b_4 + \lambda L(1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 p_1 b_4 - \lambda^2 L^2 \right) \right] &= 0 \\ \lambda^3 \left[ -p\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} \varepsilon b_3 b_4 L - q\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} \varepsilon p_1 b_4 L - L(1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 b_3 b_4 - L(1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 p_1 b_4 + \lambda L^2 \right] &= 0. \end{aligned} \quad (L2.1)$$

Dari persamaan (L2.1) diketahui bahwa

$$\lambda^3 = 0 \quad (L2.2)$$

atau

$$-p\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} \varepsilon b_3 b_4 L - q\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} \varepsilon p_1 b_4 L - L(1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 b_3 b_4 - L(1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 p_1 b_4 + \lambda L^2 = 0. \quad (L2.3)$$

Dari persamaan (L2.2), diketahui bahwa  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ , dari persamaan (L2.3), diketahui bahwa

$$\begin{aligned} L \left( -p\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} \varepsilon b_3 b_4 - q\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} \varepsilon p_1 b_4 - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 b_3 b_4 - (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 p_1 b_4 + \lambda L \right) &= 0 \\ \lambda L &= p\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} \varepsilon b_3 b_4 + q\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} \varepsilon p_1 b_4 + (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 b_3 b_4 + (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 p_1 b_4 \\ \lambda &= \frac{p\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} \varepsilon b_3 b_4 + q\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} \varepsilon p_1 b_4 + (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 b_3 b_4 + (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 p_1 b_4}{L} \end{aligned}$$

Substitusikan nilai  $L = b_1 b_2 b_3 b_4 - b_1 b_4 p_1 \xi_2 - b_4 p_1 \xi_1 \varepsilon$  , sehingga diperoleh

$$\lambda_4 = \frac{p\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} \varepsilon b_3 b_4 + q\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} \varepsilon p_1 b_4 + (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 b_3 b_4 + (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 p_1 b_4}{b_1 b_2 b_3 b_4 - b_1 b_4 p_1 \xi_2 - b_4 p_1 \xi_1 \varepsilon}$$

$$\lambda_4 = \frac{[\beta_1 b_3 (\varepsilon p + b_1 (1-p)) + \beta_2 p_1 (\varepsilon q + b_1 (1-q))] \frac{\Lambda}{\mu}}{b_1 b_2 b_3 - (\varepsilon \xi_1 + b_1 \xi_2) p_1}.$$



**Lampiran 3.** Hubungan titik kesetimbangan endemi  $E^*$  dengan  $R_0$

$$I_2^* = -b_3 \frac{\beta_1 b_3 \Lambda ((1-p) b_1 + \varepsilon p) + \beta_2 p_1 \Lambda (\varepsilon q + (1-q) b_1) + \mu (-b_1 b_2 b_3 + \varepsilon \xi_1 p_1 + \xi_2 b_1 p_1)}{\beta_1 b_3 (\varepsilon \xi_1 p_1 + \xi_2 b_1 p_1 - b_1 b_2 b_3) + \beta_2 p_1 (\varepsilon \xi_1 p_1 + \xi_2 b_1 p_1 - b_1 b_2 b_3)}$$

$$I_2^* = -b_3 \frac{(\beta_1 b_3 ((1-p) b_1 + \varepsilon p) + \beta_2 p_1 (\varepsilon q + (1-q) b_1)) \Lambda}{(-b_1 b_2 b_3 + \varepsilon \xi_1 p_1 + \xi_2 b_1 p_1)} + \mu$$

$$I_2^* = -b_3 \frac{\beta_1 b_3 + \beta_2 p_1}{\beta_1 b_3 + \beta_2 p_1}$$

Pembilang dan penyebut dikali dengan  $\frac{1}{\mu}$

$$I_2^* = -b_3 \frac{(\beta_1 b_3 ((1-p) b_1 + \varepsilon p) + \beta_2 p_1 (\varepsilon q + (1-q) b_1)) \Lambda}{(-b_1 b_2 b_3 + \varepsilon \xi_1 p_1 + \xi_2 b_1 p_1)} + \mu \times \frac{1}{\frac{1}{\mu}}$$

$$I_2^* = b_3 \frac{(\beta_1 b_3 ((1-p) b_1 + \varepsilon p) + \beta_2 p_1 (\varepsilon q + (1-q) b_1)) \frac{\Lambda}{\mu} - 1}{(b_1 b_2 b_3 - (\varepsilon \xi_1 + \xi_2 b_1) p_1)} \times \mu. \quad (L3.1)$$

Diketahui

$$R_0 = \frac{\left(\beta_1 b_3((1-p)b_1 + \varepsilon p) + \beta_2 p_1(\varepsilon q + (1-q)b_1)\right) \frac{\Lambda}{\mu}}{(b_1 b_2 b_3 - (\varepsilon \xi_1 + \xi_2 b_1)p_1)},$$

sehingga persamaan (L3.1) menjadi

$$I_2^* = b_3 \frac{R_0 - 1}{\beta_1 b_3 + \beta_2 p_1} \mu.$$

Diketahui

$$J^* = \frac{p_1 I_2^*}{b_3}, \quad (L3.2)$$

Substitusikan persamaan (L3.1) ke persamaan (L3.2), diperoleh

$$J^* = p_1 \left( \frac{R_0 - 1}{\beta_1 b_3 + \beta_2 p_1} \right) \mu. \quad (L3.3)$$

Diketahui

$$A^* = \frac{p_2}{b_4} J^* \quad (L3.4)$$

Substitusikan persamaan (L3.3) ke persamaan (L3.4), diperoleh

$$A^* = \frac{p_2}{b_4} \left( p_1 \left( \frac{R_0 - 1}{\beta_1 b_3 + \beta_2 p_1} \right) \mu \right).$$

Diketahui

$$S^* = \frac{\Lambda}{\beta_1 \frac{b_3}{p_1} J^* + \beta_2 J^* + \mu} \quad (L3.5)$$

Subtitukan persamaan (L3.3) ke dalam persamaan (L3. 6), sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} S^* &= \frac{\Lambda}{\beta_1 \frac{b_3}{p_1} \left( p_1 \mu \left( \frac{R_0 - 1}{\beta_1 b_3 + \beta_2 p_1} \right) \right) + \beta_2 \left( p_1 \mu \left( \frac{R_0 - 1}{\beta_1 b_3 + \beta_2 p_1} \right) \right) + \mu} \\ &= \frac{\Lambda(\beta_1 b_3 + \beta_2 p_1)}{\beta_1 b_3 (\mu(R_0 - 1)) + \beta_2 (p_1 \mu(R_0 - 1)) + \mu(\beta_1 b_3 + \beta_2 p_1)} \\ &= \frac{\Lambda(\beta_1 b_3 + \beta_2 p_1)}{\beta_1 b_3 \mu R_0 - \beta_1 b_3 \mu + \beta_2 p_1 \mu R_0 - \beta_2 p_1 \mu + \mu \beta_1 b_3 + \mu \beta_2 p_1} \\ &= \frac{\Lambda(\beta_1 b_3 + \beta_2 p_1)}{(\beta_1 b_3 + \beta_2 p_1) \mu R_0} \\ &= \frac{\Lambda}{\mu R_0}. \end{aligned}$$

Diketahui

$$I_1^* = \frac{1}{b_1} \left( p\beta_1 b_3 \frac{\Lambda}{\beta_1 b_3 J^* + \beta_2 J^* p_1 + \mu p_1} + q\beta_2 \frac{\Lambda p_1}{\beta_1 b_3 J^* + \beta_2 J^* p_1 + \mu p_1} + \xi_1 \right) J^*$$

$$\begin{aligned} I_1^* &= \frac{1}{b_1} \left( p\beta_1 \frac{\Lambda b_3}{\beta_1 b_3 J^* + \beta_2 J^* p_1 + \mu p_1} + q\beta_2 \frac{\Lambda p_1}{\beta_1 b_3 J^* + \beta_2 J^* p_1 + \mu p_1} + \xi_1 \right) J^*, \\ &= \frac{1}{b_1} \left( \frac{p\beta_1 \Lambda b_3 + q\beta_2 \Lambda p_1}{(\beta_1 b_3 + \beta_2 p_1) \left( p_1 \mu \frac{R_0 - 1}{\beta_1 b_3 + \beta_2 p_1} \right) + \mu p_1} + \xi_1 \right) \left( p_1 \mu \left( \frac{R_0 - 1}{\beta_1 b_3 + \beta_2 p_1} \right) \right) \\ &= \frac{1}{b_1} \left( \frac{p\beta_1 \Lambda b_3 + q\beta_2 \Lambda p_1}{p_1 \mu (R_0 - 1) + \mu p_1} + \xi_1 \right) \left( p_1 \mu \left( \frac{R_0 - 1}{\beta_1 b_3 + \beta_2 p_1} \right) \right) \\ &= \frac{1}{b_1} \left( \frac{p\beta_1 \Lambda b_3 + q\beta_2 \Lambda p_1}{p_1 \mu R_0} + \xi_1 \right) \left( p_1 \mu \left( \frac{R_0 - 1}{\beta_1 b_3 + \beta_2 p_1} \right) \right) \\ &= \frac{1}{b_1} \left( \frac{p\beta_1 \Lambda b_3 + q\beta_2 \Lambda p_1}{R_0} + \xi_1 p_1 \mu \right) \left( \frac{R_0 - 1}{\beta_1 b_3 + \beta_2 p_1} \right). \end{aligned}$$



**Lampiran 4.** Perhitungan koefisien persamaan 3.7

$$\begin{vmatrix} -b_1 - \lambda & p\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} & q\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} + \xi_1 \\ \varepsilon & (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} - b_2 - \lambda & (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} + \xi_2 \\ 0 & p_1 & -b_3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-p_1 \begin{vmatrix} -b_1 - \lambda & q\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} + \xi_1 \\ \varepsilon & (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} + \xi_2 \end{vmatrix} + (-b_3 - \lambda) \begin{vmatrix} -b_1 - \lambda & p\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} \\ \varepsilon & (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} - b_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-p_1 \left[ -(b_1 + \lambda) \left( (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} + \xi_2 \right) - \varepsilon q\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} - \varepsilon \xi_1 \right] - (b_3 + \lambda) \left[ -(b_1 + \lambda) \left( (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} - b_2 - \lambda \right) - \varepsilon p\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} \right] = 0$$

$$p_1 \left[ (b_1 + \lambda) \left( (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} + \xi_2 \right) + \varepsilon q\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} + \varepsilon \xi_1 \right] + (b_3 + \lambda) \left[ (b_1 + \lambda) \left( (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} - b_2 - \lambda \right) + \varepsilon p\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} \right] = 0$$

$$p_1 \left[ (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 + \xi_2 b_1 + (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} \lambda + \xi_2 \lambda + \varepsilon q \beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} + \varepsilon \xi_1 \right] \\ + (b_3 + \lambda) \left[ (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 - b_2 b_1 - \lambda b_1 + (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} \lambda - b_2 \lambda - \lambda^2 + \varepsilon p \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} \right] = 0$$

$$\left[ (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 p_1 + \xi_2 b_1 p_1 + (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} \lambda p_1 + \xi_2 \lambda p_1 + \varepsilon q \beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} p_1 + \varepsilon \xi_1 p_1 \right] + (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 b_3 - b_2 b_1 b_3 \\ - \lambda b_1 b_3 + (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} \lambda b_3 - b_2 \lambda b_3 - \lambda^2 b_3 + \varepsilon p \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_3 + (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 \lambda - b_2 b_1 \lambda - b_1 \lambda^2 \\ + (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} \lambda^2 - b_2 \lambda^2 - \lambda^3 + \varepsilon p \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} \lambda = 0$$

$$- \left[ -(1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 p_1 - \xi_2 b_1 p_1 - (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} \lambda p_1 - \xi_2 \lambda - \varepsilon q \beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} p_1 - \varepsilon \xi_1 p_1 - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 b_3 + b_2 b_1 b_3 \right. \\ \left. + \lambda b_1 b_3 - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} \lambda b_3 + b_2 \lambda b_3 + \lambda^2 b_3 - \varepsilon p \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_3 - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 \lambda + b_2 b_1 \lambda + b_1 \lambda^2 \right. \\ \left. - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} \lambda^2 + b_2 \lambda^2 + \lambda^3 - \varepsilon p \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} \lambda \right] = 0$$

$$\begin{aligned}
& \lambda^3 - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} \lambda^2 + b_2 \lambda^2 + \lambda^2 b_3 + b_1 \lambda^2 - (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} \lambda p_1 - \xi_2 \lambda p_1 - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 \lambda + b_2 b_1 \lambda \\
& - \varepsilon p \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} \lambda + \lambda b_1 b_3 - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} \lambda b_3 + b_2 \lambda b_3 - \varepsilon q \beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} p_1 - \varepsilon \xi_1 p_1 - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 b_3 + b_2 b_1 b_3 \\
& - \varepsilon p \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_3 - (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 p_1 - \xi_2 b_1 p_1 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \lambda^3 + \lambda^2 \left[ -(1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} + b_2 + b_3 + b_1 \right] \\
& + \lambda \left[ -(1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} p_1 - \xi_2 p_1 - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 + b_2 b_1 - \varepsilon p \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_3 + b_2 b_3 \right] - \varepsilon q \beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} p_1 \\
& - \varepsilon \xi_1 p_1 - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 b_3 + b_2 b_1 b_3 - \varepsilon p \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_3 - (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 p_1 - \xi_2 b_1 p_1 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \lambda^3 + \lambda^2 \left[ -(1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} + b_2 + b_3 + b_1 \right] \\
& + \lambda \left[ b_2 b_1 + b_1 b_3 + b_2 b_3 - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 - (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} p_1 - \xi_2 p_1 - \varepsilon p \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_3 \right] + b_2 b_1 b_3 \\
& - \varepsilon q \beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} p_1 - \varepsilon \xi_1 p_1 - (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 p_1 - \xi_2 b_1 p_1 - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 b_3 - \varepsilon p \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_3 = 0
\end{aligned}$$

$$\lambda^3 a_0 + \lambda^2 a_1 + \lambda a_2 + a_3 = 0,$$

dengan

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = -(1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} + b_2 + b_3 + b_1$$

$$a_2 = b_2 b_1 + b_1 b_3 + b_2 b_3 - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 - (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} p_1 - \xi_2 p_1 - \varepsilon p \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_3$$

$$a_3 = b_2 b_1 b_3 - \varepsilon q \beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} p_1 - \varepsilon \xi_1 p_1 - (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 p_1 - \xi_2 b_1 p_1 - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 b_3 - \varepsilon p \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_3$$

**Lampiran 5.** Pembuktian  $a_1a_2 - a_0a_3 > 0$

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = b_2 + b_3 + b_1 - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu}$$

$$a_2 = b_2b_1 + b_1b_3 + b_2b_3 - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 - (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} p_1 - \xi_2 p_1 - \varepsilon p \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_3$$

$$a_3 = b_2b_1b_3 - \varepsilon q \beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} p_1 - \varepsilon \xi_1 p_1 - (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 p_1 - \xi_2 b_1 p_1 - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 b_3 - \varepsilon p \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_3$$

$$a_1a_2 - a_0a_3 = \left( b_2 + b_3 + b_1 - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} \right) \left( -(1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} p_1 - \xi_2 p_1 + b_2b_1 + b_1b_3 + b_2b_3 - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 - \varepsilon p \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} \right. \\ \left. - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_3 \right) - 1 \left( -\varepsilon q \beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} p_1 + b_2b_1b_3 - \varepsilon \xi_1 p_1 - (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 p_1 - \xi_2 b_1 p_1 - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 b_3 - \varepsilon p \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_3 \right)$$

$$a_1a_2 - a_0a_3 = -(1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} p_1 b_2 - \xi_2 p_1 b_2 + b_1b_2^2 + b_1b_2b_3 + b_2^2b_3 - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1b_2 - \varepsilon p \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_2 - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_3b_2 \\ - (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} p_1 b_3 - \xi_2 p_1 b_3 + b_2b_1b_3 + b_1b_3^2 + b_2b_3^2 - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1b_3 - \varepsilon p \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_3 - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_3^2 \\ - (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} p_1 b_1 - \xi_2 p_1 b_1 + b_2b_1^2 + b_3b_1^2 + b_2b_3b_1 - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1^2 - \varepsilon p \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_3b_1 \\ + (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} p_1 + (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} \xi_2 p_1 - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_2b_1 - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1b_3 \\ - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_2b_3 + (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 + (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} \varepsilon p \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} + (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_3 \\ - \varepsilon q \beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} p_1 - b_2b_1b_3 - \varepsilon \xi_1 p_1 - (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} b_1p_1 - \xi_2 b_1p_1 + (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1b_3 + \varepsilon p \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_3$$

$$\begin{aligned}
a_1 a_2 - a_0 a_3 = & b_1 b_2^2 + b_1 b_2 b_3 + b_2^2 b_3 + b_2 b_1 b_3 + b_1 b_3^2 + b_2 b_3^2 + b_2 b_1^2 + b_3 b_1^2 + b_2 b_3 b_1 \\
& + (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} p_1 + (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} \xi_2 p_1 + (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 \\
& + (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} \varepsilon p \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} + (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_3 - (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} p_1 b_2 - \xi_2 p_1 b_2 \\
& - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 b_2 - \varepsilon p \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_2 - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_3 b_2 - (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} p_1 b_3 - \xi_2 p_1 b_3 \\
& - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 b_3 - \varepsilon p \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_3 - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_3^2 - (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} p_1 b_1 - \xi_2 p_1 b_1 \\
& - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1^2 - \varepsilon p \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_3 b_1 - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_2 b_1 \\
& - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 b_3 - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_2 b_3 - \varepsilon q \beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} p_1 - b_2 b_1 b_3 - \varepsilon \xi_1 p_1 \\
& - (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 p_1 - \xi_2 b_1 p_1 + (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 b_3 + \varepsilon p \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_1 a_2 - a_0 a_3 &= b_1 b_3^2 + b_3 b_1^2 + (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} p_1 + (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} \xi_2 p_1 + (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 \\
&\quad + (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} \varepsilon p \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} + (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_3 + \varepsilon p \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_3 \\
&\quad + \left( b_2^2 b_3 - (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} p_1 b_2 - \xi_2 p_1 b_2 - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_2 b_3 - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_3 b_2 \right) \\
&\quad + \left( b_2 b_3^2 - (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} p_1 b_3 - \xi_2 p_1 b_3 - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_3^2 \right) \\
&\quad + \left( b_2 b_1 b_3 - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 b_3 - \varepsilon p \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_3 - \xi_2 p_1 b_1 - \varepsilon \xi_1 p_1 - \varepsilon q \beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} p_1 - (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 p_1 \right) \\
&\quad + \left( b_1 b_2 b_3 - (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} p_1 b_1 - \xi_2 b_1 p_1 - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_3 b_1 \right) \\
&\quad + \left( b_2 b_1^2 - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1^2 - \varepsilon p \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 \right) + \left( b_1 b_2^2 - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 b_2 - \varepsilon p \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_2 \right) \\
&\quad + \left( b_1 b_2^2 - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_2 b_1 \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_1 a_2 - a_0 a_3 &= b_1 b_3^2 + b_3 b_1^2 + (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} p_1 + (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} \xi_2 p_1 + (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 + (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} \varepsilon p \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} \\
&\quad + (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_3 + \varepsilon p \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_3 \\
&\quad + \left( b_1 b_2 b_3 - (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} p_1 b_1 - \xi_2 p_1 b_1 - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 b_3 - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_3 b_1 \right) \frac{b_2}{b_1} \\
&\quad + \left( b_1 b_2 b_3 - (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} p_1 b_1 - \xi_2 p_1 b_1 - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_3 b_1 \right) \frac{b_3}{b_1} + \left( -(1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 b_3 + b_1 b_2 b_3 \right) \frac{b_2}{b_3} \\
&\quad + \left( b_2 b_1 b_3 - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 b_3 - \varepsilon p \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_3 - \xi_2 p_1 b_1 - \varepsilon \xi_1 p_1 - \varepsilon q \beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} p_1 - (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 p_1 \right) \\
&\quad + \left( b_1 b_2 b_3 - (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} p_1 b_1 - \xi_2 b_1 p_1 - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_3 b_1 \right) + \left( b_2 b_1 b_3 - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 b_3 - \varepsilon p \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_3 \right) \frac{b_1}{b_3} \\
&\quad + \left( b_1 b_2 b_3 - (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 b_3 - \varepsilon p \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_3 \right) \frac{b_2}{b_3}
\end{aligned}$$

Jika  $R_0 < 1$ , maka terbukti  $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$  karena

$$b_1 b_2 b_3 > (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} p_1 b_1 + \xi_2 p_1 b_1 + (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 b_3 + (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_3 b_1,$$

$$b_1 b_2 b_3 > (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} p_1 b_1 + \xi_2 p_1 b_1 + (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_3 b_1,$$

$$b_2 b_1 b_3 > (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 b_3 + \varepsilon p \beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_3 + \xi_2 p_1 b_1 + \varepsilon \xi_1 p_1 + \varepsilon q \beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} p_1 + (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 p_1,$$

$$b_1 b_2 b_3 > (1-q)\beta_2 \frac{\Lambda}{\mu} p_1 b_1 + \xi_2 b_1 p_1 + (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_3 b_1,$$

$$b_2 b_1 b_3 > (1-p)\beta_1 \frac{\Lambda}{\mu} b_1 b_3.$$